



**HAL**  
open science

# Systèmes dynamiques sur réseaux : Applications au milieu interstellaire et à la transition vers la turbulence

Guillaume Rousseau

► **To cite this version:**

Guillaume Rousseau. Systèmes dynamiques sur réseaux : Applications au milieu interstellaire et à la transition vers la turbulence. Physique [physics]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 1998. Français. NNT: . tel-00001079

**HAL Id: tel-00001079**

**<https://theses.hal.science/tel-00001079>**

Submitted on 31 Jan 2002

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE DOCTORALE D'ASTRONOMIE D'ILE DE FRANCE

# THÈSE

présentée pour obtenir le diplôme de  
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS VII (Denis Diderot)

Spécialité :

ASTROPHYSIQUE ET TECHNIQUES SPATIALES

par Guillaume Rousseau

SYSTÈMES DYNAMIQUES SUR RÉSEAU : APPLICATIONS AU MILIEU INTERSTELLAIRE ET À LA TRANSITION VERS LA TURBULENCE
--

Soutenue le 15 décembre 1998      devant le Jury composé de :

Jean-Paul Zahn	Président
Edith Falgarone	Rapporteur
Paul Manneville	Rapporteur
Jacques Le Bourlot	Directeur de Thèse
Hugues Chaté	Directeur de Thèse



# Remerciements

Que ceux que j'ai involontairement oubliés ici me pardonnent.

Cette thèse est l'aboutissement de trois ans de travail au sein de deux laboratoires :

- le Département d'Astrophysique Extragalactique et de Cosmologie (D.A.E.C. Observatoire de Paris, Section de Meudon)
- le Service de Physique de l'Etat Condensé (DSM/S.P.E.C, CEA-Saclay).

J'ai ainsi eu la possibilité de fréquenter deux communautés fort différentes, qui chacune à leur manière ont participé à mon émancipation scientifique.

J'ai d'abord rencontré **Bruno Giorgini** sans qui je ne serais pas là et qui lors de ma première année sur les bancs de la fac a su m'inciter à choisir cette voie. Qu'il trouve ici toute ma reconnaissance qui ne peut se résumer en quelques lignes.

C'est également à cette période que j'ai côtoyé **Jacques Le Bourlot** pour la première fois, ne sachant pas bien sûr qu'il serait amené à diriger ma thèse. Sa responsabilité s'étend bien au delà de mes trois années de thèse par le biais de ses activités au sein de la licence et maîtrise de modélisation physique et simulation numérique de Paris 7.

Les quelques "promotions" de cette orientation expérimentales ont vu défilé ceux qui aujourd'hui encore vadrouillent dans les laboratoires sous l'étiquette "modélisation". Je ne citerai que ceux de ma promotion : **Tiana Andriamboavonjy, Sacha Brun, Mathieu Fournaison, Adrien Hernot, François Muller, Amelor Pépin**, et pour finir **Gérard Sookahet**.

Durant ces deux années j'ai rencontré **Roland Grappin, Françoise Soliec, André Mangeney, Claude Zeippen**, tous enseignant-chercheurs de qualité dont la patience a été mise à rude épreuve.

Après vient la période de la thèse où le rôle de chacun est moins obscur. Je me contenterai donc de citer ces personnes par groupes thématiques :

Les amis et les potes

**Jérôme Novak, Elizabeth Blond, Marcq Olivier, Maria Rosa Penzi, Jérôme Chave, Ivan Dornic, Radim Vocka et Cécile Fradin.**



Les groupuscules  
Les “agités”, les “mous” et les “mus”.

Les adultes  
**Evelyne Roueff, Guillaume Pineau des Forêts, Pasqualle Londrillo  
Roberto Livi, Raymond Kapral, Peter Grassberger et Roger Bidaux.**

Le directeur de D.E.A et président de Jury  
**Jean-Paul Zahn.**

Les informaticiens méritants  
**Laurent de Sèze, Catherine Bourgois,  
François Marabelle et Anne Capdepon.**

Les deux secrétariats de choc  
**Raymonde Marciano, Erika Veia et Jacquelyne Plancy.**

Les directeurs de thèse  
**Hugues Chaté et Jacques Le Bourlot.**

Les rapporteurs au travail émérite  
**Edith Falgarone et Paul Manneville .**

La famille proche  
Ma **Grand-mère**, ma **Mère** et mon **Frère**.

Je réserverai mes derniers mots à trois personnes déterminantes :

**Julien Forest** un compagnon de route par tous temps.

**André Ligneul** dont les discussions et la vivacité d’esprit ont constitué  
une ouverture sur le monde depuis mon plus jeune âge.

**Sabine Bottin** qui aura marqué à jamais ce travail de thèse.



# **Systemes dynamiques sur reseau : Applications au milieu interstellaire et à la transition vers la turbulence.**

## **Résumé :**

Cette thèse a pour cadre général la modélisation et l'étude des systèmes dynamiques étendus. Nous nous sommes plus particulièrement intéressés aux systèmes possédant une longueur naturelle de discrétisation. Les modèles ainsi obtenus offrent la possibilité de tenir compte de processus trop coûteux numériquement dans des modèles continus. Nous avons considéré deux applications : les nuages moléculaires opaques et la transition vers la turbulence par intermittence spatio-temporelle.

Les modèles détaillés de nuages moléculaires ont montré que dans ces régions il n'y a pas de processus dominant. Une description réaliste doit inclure une chimie comprenant une centaine d'espèces au sein d'un fluide turbulent dont le bilan thermique local nécessite la résolution des équations du transfert radiatif. Nous avons développé un modèle minimal, de type "réseau d'itérations couplées", en nous plaçant à un niveau phénoménologique. L'étude de ce modèle a montré qu'il est indispensable de prendre en compte ces trois aspects pour décrire les processus contrôlant globalement l'évolution de ces systèmes.

En 1986, Y. Pomeau prédit l'existence d'un scénario spécifique et "universel" de transition vers la turbulence par intermittence spatio-temporelle. Nous avons étudié le rôle des structures propagatives couramment observées dans les simulations numériques et les expériences, qui peuvent a priori limiter la validité de l'équivalence entre systèmes stochastiques et déterministes. Nous avons montré à partir d'un modèle minimal d'intermittence spatio-temporelle, que ces structures propagatives jouent en effet un rôle actif dans l'apparition du régime turbulent spécifique.





# Lattice dynamical systems : Applications to the interstellar medium and to the transition to turbulence.

## Abstract:

The general framework of this thesis is the study and the modeling of spatially-extended systems. We have been more specifically interested by systems where a natural length exists which allows for spatial discretisation. Processes numerically too costly to be incorporated in a continuous model can then be taken into account. Specifically, we have considered the dynamics of dark molecular clouds and the transition to turbulence *via* spatio-temporal intermittency.

Detailed models of molecular clouds have shown that there is no dominating process in the inner regions. A realistic description must include a hundred of chemical species reacting within a turbulent fluid. Moreover, the local thermal balance imposes the resolution of the radiative transfer equations. We have developed a minimal “Coupled Map Lattice” model including those processes at a phenomenological level. Its study has shown that one must consider those processes simultaneously to properly describe the global evolution of the system.

In 1986, Y. Pomeau predicted the existence of a specific and “universal” scenario for transition to turbulence *via* spatio-temporal intermittency. We have studied the role of the propagative structures commonly observed in numerical models and experiments, which can a priori limit the validity of this equivalence between stochastic and deterministic systems. Using a minimal CML model of spatio-temporal intermittency, we have shown that these propagative structures play an active role in the emergence of a specific turbulent regime.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
1.1	Systèmes hors d'équilibre . . . . .	1
1.2	Modélisation des systèmes spatialement étendus . . . . .	2
1.3	Modèle de nuages moléculaires opaques . . . . .	3
1.4	Transition vers la turbulence par intermittence spatio-temporelle . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Modèles de nuages moléculaires denses</b>	<b>7</b>
2.1	Introduction . . . . .	7
2.1.1	Contexte Astrophysique . . . . .	7
2.1.2	Le milieu interstellaire. . . . .	8
2.1.3	Chimie au sein des nuages moléculaires . . . . .	12
2.1.4	Formation de raies . . . . .	18
2.1.5	Synthèse, approches et modèles . . . . .	20
2.2	Rôle du champ de vitesse . . . . .	23
2.2.1	Introduction . . . . .	23
2.2.2	Commentaire préliminaire sur l'appendice A . . . . .	23
2.2.3	“Lattice model of dense molecular cloud” . . . . .	24
2.2.4	Erratum . . . . .	43
2.2.5	Conclusions - Perspectives . . . . .	45
2.3	Stabilité de front et bilan thermique . . . . .	47
2.3.1	Système de type réaction-diffusion . . . . .	48
2.3.2	Forme variationnelle et fonction de Lyapunov . . . . .	51
2.3.3	Stabilité globale . . . . .	53
2.3.4	Bistabilité et Croissance de domaines . . . . .	55
2.3.5	Bifurcation de fronts . . . . .	58
2.3.6	Synthèse et applications . . . . .	65
2.4	Construction d'une chimie réduite . . . . .	67
2.4.1	Introduction . . . . .	67

2.4.2	“The meudonator: a bistability kit for the interstellar chemistry” . . . . .	67
2.4.3	Conclusion . . . . .	77
2.5	Conclusion . . . . .	78
2.5.1	Synthèse . . . . .	78
2.5.2	Perspectives . . . . .	79
2.5.3	Epilogue . . . . .	80
<b>3</b>	<b>Intermittence spatio-temporelle et universalité</b>	<b>81</b>
3.1	Introduction . . . . .	81
3.1.1	Contexte physique . . . . .	81
3.1.2	Présentation du modèle MIST . . . . .	86
3.1.3	Résultats antérieurs et préliminaires . . . . .	93
3.1.4	Problématique . . . . .	101
3.2	Structures propagatives, paramètres d’ordre et exposants critiques	105
3.2.1	Définition et propriétés des structures propagatives . . . . .	105
3.2.2	Structures propagatives et universalité . . . . .	115
3.2.3	“Bons” paramètres d’ordre et exposants critiques . . . . .	126
3.3	Universalité et structuration des domaines laminaires . . . . .	142
3.3.1	Un modèle témoin de codimension 2 . . . . .	143
3.3.2	Existence d’une distribution laminaire asymptotique . . . . .	154
3.3.3	Structures au sein des zones laminaires . . . . .	159
3.3.4	Synthèse . . . . .	169
3.4	Conclusion . . . . .	172
3.4.1	Synthèse . . . . .	172
3.4.2	Perspectives . . . . .	175
3.4.3	Epilogue . . . . .	175
3.5	Appendice A : Mesure des exposants critiques . . . . .	178
3.6	Appendice B : Percolation dirigée et classe d’universalité . . . . .	186
3.7	Appendice C : La “Parity Conserving Class” . . . . .	191

# Chapitre 1

## Introduction générale

*Le physicien est un artisan des modèles.*

Bruno Giorgini

### 1.1 Systèmes hors d'équilibre

La thermodynamique est la branche de la physique qui étudie les lois générales régissant les changements d'états des systèmes composés d'un grand nombre d'éléments. L'état de ces systèmes de taille macroscopique est caractérisé par un ensemble fini de variables d'état telles que le volume, la température, la pression, ou encore les densités de différentes espèces chimiques. Les deux lois fondamentales de la thermodynamique sont reliées aux notions d'énergie et d'entropie qui sont toutes deux fonctions des variables d'état.

La thermodynamique classique décrit les systèmes à l'*équilibre*, c'est à dire des états où la température est constante en tout point du système, et leurs changements d'états. Dans beaucoup de systèmes hors d'équilibre, il est possible de définir un équilibre local. Les grandeurs extensives sont rapportées à un élément de volume. On parle alors de densité d'énergie et de densité d'entropie. Dans ce cas l'énergie totale n'est plus fonction des autres grandeurs extensives[65].

Un système isolé que l'on éloigne de son état d'équilibre relaxe vers cet état sous l'action de processus irréversibles qui disparaîtrons une fois l'équilibre atteint. Dans ce cas, la dynamique hors d'équilibre n'est que transitoire.

En revanche, si le système n'est pas isolé, il peut être maintenu hors d'équilibre par exemple sous l'action d'un gradient de température ou d'un apport permanent de matière. Lorsque les contraintes ainsi exercées sont faibles, on dispose des résultats de la "thermodynamique hors d'équilibre linéaire" qui nous assurent l'unicité de la solution grâce à un principe d'extremum lié au taux de production d'entropie [65]. Le régime observé possède alors les mêmes symétries que la contrainte appliquée<sup>1</sup>.

Loin de ce régime linéaire, le système peut spontanément *bifurquer* vers d'autres solutions ne possédant plus toutes les symétries de la contrainte. Ces états sont appelés *structures dissipatives* [77] afin de souligner le caractère irréversible mais entretenu des processus en jeu.

Les systèmes hors d'équilibre sont les plus fréquents dans la nature et les domaines d'application des résultats obtenus sur les mécanismes de formation de ces structures<sup>2</sup> couvrent la physique, la chimie et la biologie. La référence [23] est un article de synthèse décrivant les principaux résultats sur le sujet.

## 1.2 Modélisation des systèmes spatialement étendus

L'étude de systèmes spatialement étendus passe le plus souvent par la construction d'un modèle aboutissant à un ensemble d'équations aux dérivées partielles, et permettant de connaître l'évolution à tout temps et en tous points des variables intensives caractérisant l'état local du milieu (température, densité, ...). Les termes composants ces équations incluent la réaction locale du système à la contrainte extérieure, et les flux (de matière ou d'énergie) aux échelles microscopiques (diffusion) et mésoscopique (advection). C'est ainsi que l'on aboutit par exemple aux équations de Navier-Stokes pour les fluides [39], ou à des équations de type réaction-diffusion pour les réacteurs chimiques [100, 76].

Les modèles continus en espace et en temps sont coûteux numériquement, et il est souvent difficile d'atteindre les limites des temps longs ou des grandes tailles. Dans ce cas, la comparaison avec des résultats expérimentaux est délicate. Une approche possible est alors de chercher à simplifier le modèle en renonçant à un certain niveau de détail pour conserver la vision globale.

Il existe parfois une taille caractéristique en dessous de laquelle les variations des densités locales sont faibles ou non significatives du point de vue de

---

1. On dira de cette solution qu'elle est sur la branche thermodynamique.

2. "Pattern formation" en anglais.

l'évolution du système. Dans ce cas on peut se contenter de la connaissance des valeurs moyennes des variables locales à cette échelle, et ne mener les calculs que sur un sous-ensemble de l'espace constituant en général un réseau régulier. La même discrétisation peut être faite en temps.

Un degré supplémentaire de simplification est possible lorsque les valeurs prises par les variables locales sont distribuées autour d'un ensemble fini et petit de valeurs, permettant de définir localement différentes "phases". Dans ce cas, on "réduit" également la variable locale qui ne peut prendre maintenant que des valeurs discrètes.

On représente dans le tableau suivant les différents types de modèles suivant le caractère discret ou continu de l'espace, du temps et des variables locales.

Type de Modèle	Espace	Temps	Variable Locale
Equation aux Dérivées Partielles	continu	continu	continue
Réseau d'Equations Différentielles	discret	continu	continue
Réseau d'Itérations Couplées	discret	discret	continue
Automate Cellulaire	discret	discret	discrète

Il n'est pas simple de démontrer l'équivalence entre les comportements possibles d'un système d'équations aux dérivées partielles et sa réduction à un automate cellulaire. Les comparaisons et analogies que l'on en tire restent le plus souvent qualitatives. Il est alors nécessaire d'obtenir des résultats robustes<sup>3</sup> si l'on souhaite progresser dans la compréhension des propriétés du système réel.

Nous avons considéré deux cas de figure où l'emploi de *réseaux d'itérations couplées* nous a semblé particulièrement pertinent pour les raisons que nous allons sommairement présenter.

### 1.3 Modèle de nuages moléculaires opaques

Le premier exemple est développé dans le chapitre 2, où nous nous intéressons aux nuages moléculaires opaques du milieu interstellaire. La multitude de paramètres entrant en ligne de compte rend l'étude complète (théorique ou numérique) difficile et souvent hors de portée, bien qu'il n'y ait pas *a priori* de processus caché restant à découvrir.

Les modèles détaillés de nuages moléculaires ont montré que dans les régions les plus profondes, protégées du rayonnement ultra violet extérieure, il

---

3. C'est à dire couvrant un large domaine de l'espace des paramètres et ne dépendant pas des détails du modèle qui sont souvent arbitraires. On dira également générique.



n’y a pas de processus physique dominant. Une description réaliste doit inclure, entre autre, une chimie comprenant une centaine d’espèces au sein d’un fluide turbulent dont le bilan thermique local nécessite la résolution des équations du transfert radiatif. Nous avons développé un modèle minimal, de type “réseau d’itérations couplées”, en nous plaçant à un niveau phénoménologique. L’étude de ce modèle (section 2.2) a montré qu’il est nécessaire de prendre en compte ces trois aspects pour décrire les processus contrôlant globalement l’évolution de ces systèmes .

Une étude détaillée de la chimie interstellaire a montré l’existence de domaines de bistabilité dans les modèles [71]. Ils correspondent à la coexistence de deux solutions stationnaires dans l’espace des phases [100]. L’importance de cette propriété sera explicitement discutée dans la Sect. 2.3

## 1.4 Transition vers la turbulence par intermittence spatio-temporelle

L’intermittence spatio-temporelle est un régime turbulent caractérisé par la coexistence de domaines séparés par des fronts dont les distributions à un temps donné et en un point donné sont désordonnées.

La conjecture de Pomeau (1986) sur l’existence d’un scénario spécifique et “universel” de transition vers la turbulence est depuis plus de dix ans l’objet de nombreuses études aussi bien théoriques qu’expérimentales. Cette conjecture prévoit, lorsque la transition est continue, l’existence d’une analogie forte entre les processus contrôlant l’évolution de systèmes déterministes, et ceux gouvernant la dynamique des systèmes stochastiques appartenant à la classe d’universalité de la percolation dirigée.

Les observations expérimentales montrent que la propagation de l’état turbulent peut être influencée par l’existence de structures propagatives émises en bordure de domaines turbulents. Ces structures sont révélatrices du caractère déterministe des règles d’évolution, et sont à même de réduire l’équivalence entre systèmes stochastiques et déterministes. Nous avons montré (Chapitre 3) à partir d’un modèle minimal d’intermittence spatio-temporelle, que ces structures propagatives jouent un rôle actif dans l’apparition du régime turbulent.

## MISE EN GARDE

L'astrophysique est un domaine pluridisciplinaire qui voit régulièrement apparaître des voies où se mêlent plusieurs communautés donnant naissance à de nouveaux champs scientifiques : on parle communément d'“astro-particule”, ou encore d'“astro-chimie”. Ce travail de thèse se situe à l'interface entre l'astrophysique et la physique “non linéaire”. La difficulté principale dans un tel cas vient de l'absence d'un vocabulaire commun aux deux communautés.

C'est pourquoi chaque chapitre commence par une introduction où sont présentées les notions et la terminologie indispensables à la compréhension des résultats discutés par la suite.



# Chapitre 2

## Modèles de nuages moléculaires denses

### 2.1 Introduction

#### 2.1.1 Contexte Astrophysique

L'astrophysique, au sens large, comprend tous les domaines scientifiques où l'on étudie les processus aboutissant à la formation et à l'évolution des structures et objets qui composent l'univers observable. L'utilisation de télescopes de plus en plus puissants permet de remonter le temps et d'obtenir des informations sur les premières étapes de la formation des grandes structures. Celles-ci se composent principalement de galaxies regroupées en amas pouvant eux mêmes être vus comme des entités indépendantes regroupées en super-amas. La Galaxie à laquelle nous appartenons, est constituée d'environ 100 milliards d'étoiles qui se situent principalement dans un plan et sont à l'origine de la large bande lumineuse observée par nuit claire, appelée "Voie lactée".

Il est en général moins connu du grand public que l'espace entre les étoiles n'est pas vide, mais contient une quantité significative de matière<sup>1</sup> sous forme de gaz, composé à 90 % d'hydrogène et à 10 % d'hélium, et de poussières<sup>2</sup>. Une bonne présentation générale est donnée par G. Wynn-Williams [102].

L'évolution de la galaxie est régie par des échanges de matière entre les étoiles et le milieu interstellaire. Les étoiles se forment localement par effondrement gravitationnel. Lors de cet effondrement, température et densité du

---

1. Environ 10% de la masse totale de la galaxie.

2. Moins de 1% de la masse totale du milieu interstellaire.

gaz augmentent jusqu'à ce qu'elles soient suffisantes pour que les réactions de fusion nucléaire démarrent. L'étoile commence alors à consommer son carburant. Ces réactions ont pour effet de transformer des éléments légers ( $H$ ,  $He$ , ...) en éléments plus lourds ( $Be$ ,  $B$ ,  $Li$ ,  $N$ ,  $O$ ,  $F$ , ...).

Ces éléments lourds ne pouvant être constitués lors de la nucléosynthèse primordiale en quantité suffisante pour expliquer les abondances observées (voir [21] et références citées), tous les atomes qui nous composent, et notamment le carbone, ont été formés il y a quelques milliards d'années au cœur d'une étoile. Durant sa vie, d'autant plus courte qu'elle est massive, une étoile réinjecte dans le milieu interstellaire une partie de la matière qui la compose. Cela se produit par exemple lors des phases de forte activité (T-tauri), tout au long de sa vie (vent stellaire) ou en phase terminale (supernova ou nébuleuses planétaires) [94, 96]. Cette matière peut alors rentrer de nouveau dans un cycle de formation d'étoiles. Toute la matière d'une étoile n'est pas réinjectée dans le milieu interstellaire. Le vieillissement de la galaxie est caractérisé par une diminution, en partie compensée par l'apport de gaz intergalactique, de la matière contenue dans le milieu interstellaire, et un enrichissement de celle-ci en éléments lourds (augmentation de la métallicité).

La formation d'étoiles au sein du milieu interstellaire apparaît comme un processus clé dans la compréhension de l'évolution d'une galaxie isolée. Comprendre ce processus revient à prédire dans quelles circonstances une fluctuation de densité va être instable et s'effondrer localement pour aboutir à la formation d'une étoile. Cette vision minimale mène au critère de *Jeans* obtenu par comparaison des énergies thermiques et gravitationnelles d'une bulle isotherme à l'équilibre hydrostatique.

Ce critère se révèle insuffisant dans la mesure où il ne tient pas compte d'autres effets stabilisants comme la présence d'une composante magnétique, d'un champ de vitesse turbulent non-stationnaire, ou encore de processus de fragmentation.

Notre travail se situe en amont de ces études et vise à comprendre quels sont les processus régissant l'évolution des parties denses et sombres du milieu interstellaire, susceptibles de s'effondrer.

### 2.1.2 Le milieu interstellaire.

Le milieu interstellaire est essentiellement composé d'hydrogène et d'hélium sous forme gazeuse. Les observations ont rapidement montré qu'il existait des zones de plus forte concentration bien délimitées, au moins sur les plaques photographiques. On parle alors de nuages, sans doute en raison de la forte

ressemblance avec les nuages atmosphériques, baignant dans une composante plus diffuse de densité avoisinant une particule par  $cm^3$ .

Le milieu interstellaire se comporte comme un ensemble de fluides hydrodynamiques compressibles, non-isothermes, faiblement magnétisés, et autogravitants. Dans toute la suite nous nous intéresserons à la partie moléculaire des nuages, protégée du rayonnement ultra violet.

Les conditions physiques déduites des observations montrent que ces systèmes sont dans un régime de *turbulence développée* avec des nombres de Reynolds largement supérieurs aux seuils usuels d'apparition de celle-ci en laboratoire ([93, 33, 81] et références citées). Le caractère "développé" de la turbulence fait référence à un processus de cascade d'énergie depuis une grande échelle, appelée échelle d'injection, vers des structures plus petites où elle sera dissipée [35]. Pour entretenir ce régime turbulent, l'énergie doit être continuellement injectée dans le système. Dans le cas du milieu interstellaire, il est probable que la rotation différentielle de la galaxie soit à l'origine de cette injection d'énergie à grande échelle (sans que le mécanisme ait été réellement identifié), au même titre que d'autres mécanismes à plus petite échelle (e.g. les supernovae).

Une autre source d'énergie, thermique cette fois, est particulièrement importante pour comprendre les mécanismes d'évolution du milieu interstellaire, et plus spécifiquement des nuages diffus ou des bords de nuages denses. Ces régions sont exposées au fort rayonnement ultra violet émis par les étoiles voisines. Les interactions entre ces photons et les poussières provoquent l'éjection d'électrons rapides ( quelques  $^3 eV$ ) qui vont redistribuer leur énergie cinétique lors de collisions avant de se recombiner avec d'autres poussières. On parle de chauffage photoélectrique.

Le rôle de bouclier joué par le bord des nuages denses empêche le rayonnement ultra violet d'atteindre directement les parties les plus au cœur des nuages. Le chauffage par interaction avec les rayons cosmiques devient alors dominant. Lors de collisions avec l'hydrogène et l'hélium, il y a de nouveau éjection d'électrons, thermalisés par collisions<sup>4</sup>. Il s'agit également d'une source importante d'ionisation pour les réactions chimiques (voir plus loin).

Les chauffages induits par effet photoélectrique, sont à l'origine de fortes anisotropies dans les nuages translucides. Cela a, entre autre, été montré par M.

---

3.  $1 eV \sim 600 km s^{-1}$ .

4. Ces collisions excitent les transitions électroniques des molécules  $H_2$ , qui deviennent une source indirecte de photons  $UV$  au cœur même des nuages.

Kopp et E. Roueff [66, 67]. La géométrie du système et l'angle d'observation, deviennent des paramètres importants pour l'interprétation des observations.

En revanche, les rayons cosmiques ont une longueur typique de pénétration grande par rapport à la taille du système<sup>5</sup>. Ce processus déposera uniformément l'énergie dans le système, et est en fait dominant dans les régions moléculaires opaques que nous modéliserons.

Les nuages du milieu interstellaire ne peuvent donc être considérés comme isolés et sont soumis à une contrainte extérieure permanente parfois variable. L'étude de l'évolution temporelle du système passe maintenant par la compréhension des mécanismes permettant d'évacuer cette énergie uniformément déposée (on n'est pas réduit à un problème de relaxation vers l'état d'équilibre, comme c'est le cas en thermodynamique). Le milieu interstellaire se refroidit par excitation collisionnelle et émission spontanée de photons par des espèces très minoritaires ( $C$ ,  $CO$ ,  $H_2O$ , ...). Seuls les photons s'échappant du nuage contribuent au refroidissement de celui-ci, les autres y étant réabsorbés.

Nous allons nous intéresser aux parties denses et froides des nuages. Dans celles-ci, la température est de l'ordre de quelques dizaines de Kelvin, et aucun état électronique excité n'est suffisamment peuplé pour produire un refroidissement efficace. Les contributions les plus significatives viennent des transitions de rotation de la molécule de monoxyde de carbone  $CO$  et de structure fine du carbone atomique  $C$  (voir tableau 2.1). Nous ne tiendrons pas compte d'autres molécules importantes comme  $H_2O$  ou  $OH$  (voir par exemple [43]).

Il ne s'agit bien sûr que d'exemples de transitions, et une description réaliste se doit de prendre en compte plusieurs centaines de transitions différentes, notamment parce qu'une transition négligeable du point de vue du refroidissement peut être importante pour interpréter les observations. C'est le cas des transitions associées à des isotopes rares ( $^{13}C$  par rapport à  $^{12}C$ ) qui, étant moins épaisses optiquement, permettent de sonder plus profondément les nuages.

L'étude de ces nuages, dits moléculaires car l'hydrogène y est principalement sous cette forme, passe donc par la détermination des concentrations des atomes et molécules qui, bien qu'à l'état de traces (0.01% du nombre total de particules), sont déterminants pour l'établissement du bilan thermique. Ces concentrations dépendent des abondances en éléments lourds et des réactions chimiques pouvant avoir lieu.

---

5. La densité de colonne des nuages est de l'ordre de  $10^{22} \text{ cm}^{-2}$  alors que la profondeur de pénétration est typiquement de  $\sim 10^{24} \text{ cm}^{-2}$  pour les rayons cosmiques mous (jusqu'à  $10 \text{ MeV}$ ).

CO	Transition de rotation $E_r = B J(J + 1)$ $\Delta E = 2B(J + 1)$ $2B/k = 5.53 \text{ K}$ pour CO Voir [68], page 149.	$J = 1 \rightarrow 0$ : 115.27 GHz $\simeq 2.6 \text{ mm}$ $J = 2 \rightarrow 1$ : 230.54 GHz $\simeq 1.3 \text{ mm}$ $J = 3 \rightarrow 2$ : 345.81 GHz $\simeq 866.8 \text{ }\mu\text{m}$
C	Transition de structure fine conversion longueur d'onde en température $\frac{hc}{k} \simeq 1.43883 \text{ cm K}^{-1}$	${}^3P^2 \rightarrow {}^3P^1$ : 38.8 K $\simeq 370.8 \text{ }\mu\text{m}$ ${}^3P^1 \rightarrow {}^3P^0$ : 23.6 K $\simeq 609.7 \text{ }\mu\text{m}$

TAB. 2.1 - Tableau résumant les principales raies de C et CO dans les conditions des nuages moléculaires sombres. On pourra consulter les références [20, 8, 101] comme ouvrages d'introduction à l'étude des transitions entre états excités.



Température	$T \sim 20 K$
Densité	$n_H \sim 10^3 - 10^4 cm^{-3}$
Taille	$L < 1pc$
Champ magnétique	$B \sim 10 - 100\mu Gauss$
Dispersion de vitesse à 1pc	$\Delta v \sim 1km.s^{-1}$

Abondance élémentaire totale relative à l'hydrogène	
Helium	$n_{He}/n_H \sim 10^{-1}$
Oxygène	$n_O/n_H \sim 3.2 \cdot 10^{-4}$
Carbone	$n_C/n_H \sim 1.4 \cdot 10^{-4}$
Azote	$n_N/n_H \sim 7.1 \cdot 10^{-5}$

TAB. 2.2 - Conditions physiques typiques au sein des nuages moléculaires denses. Voir l'article de D. M. Meyer dans [99] et [2].

On compte à ce jour plus d'une centaine de molécules observées dans le milieu interstellaire<sup>6</sup>. La plupart de ces molécules sont très instables sur Terre et il est difficile d'obtenir une estimation réaliste de leurs taux de formation et de destruction à basse température.

Il est souvent nécessaire d'extrapoler les résultats obtenus dans des conditions de température et de pression éloignées de celles du milieu interstellaire même dense, dont les maximales sont voisines de  $10^5$  molécules par  $cm^3$  (voir tableau 2.2 pour un bilan succinct des conditions régnant au sein des nuages moléculaires dense).

### 2.1.3 Chimie au sein des nuages moléculaires

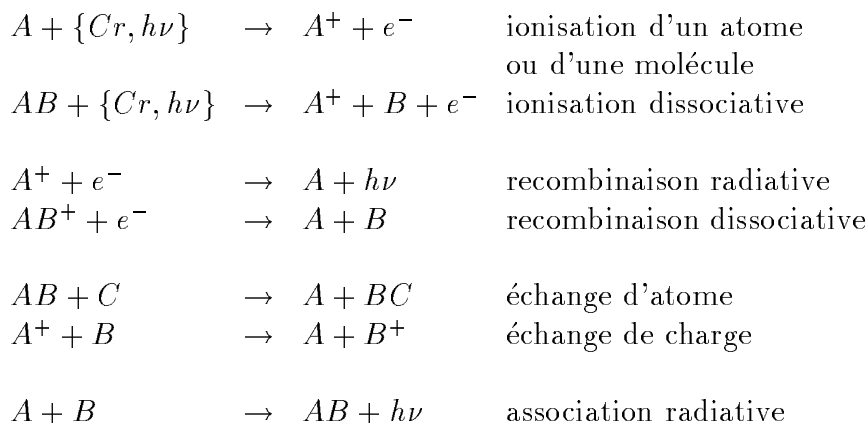
#### Généralités

La molécule la plus abondante est  $H_2$ . Sa formation en phase gazeuse est impossible dans le contexte du milieu interstellaire car il n'y pas de transition radiative assez rapide pour évacuer l'excédent d'énergie lors de la collision de deux atomes d'hydrogène, et il est généralement admis que cette molécule se forme principalement sur les grains en phase adsorbée (voir [102]). Pour les autres molécules en phase gazeuse, les conditions de température et de densité sont telles que seules les réactions à deux corps peuvent contribuer

6. On pourra consulter l'appendice 1 de la référence [99], où sont répertoriées les molécules détectées avant l'année 1996.

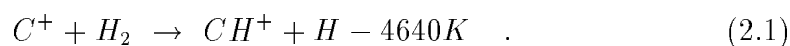
significativement à l'évolution chimique du milieu interstellaire (libre parcours moyen :  $10^6 km$ , une collision par semaine en moyenne). De même les réactions endothermiques ou possédant une barrière d'activation<sup>7</sup> ne jouent quasiment aucun rôle en l'absence d'une source d'énergie supplémentaire (un choc, par exemple).

On distingue différents types de réactions (les rayons cosmiques et les photons sont respectivement notés  $Cr$  et  $h\nu$ ):



On pourra consulter la référence [37] pour une description plus complète. Même si le schéma général est maintenant bien compris, certaines questions sont encore sujet de débats.

Nous pouvons par exemple citer le cas de la molécule ionisée  $CH^+$  qui ne se forme efficacement que par la réaction ion-neutre endothermique



Compte tenu de l'endothermie importante de cette réaction et des faibles températures observées dans les nuages moléculaires, on ne devrait trouver cette molécule qu'à l'état de trace, or elle est beaucoup plus abondante que ce que prédisent la plupart des modèles [38]. Pour expliquer sa présence, on doit supposer qu'il existe *localement* des conditions propices à sa formation.

La présence d'ondes de choc dans un milieu compressible turbulent a longtemps été une des seules explications plausibles. La dissipation est importante au niveau du front d'un choc, et elle provoque un accroissement de la température locale. On peut alors expliquer la formation d'espèces via des réactions endothermiques au cœur des fronts où la température est beaucoup plus élevée que dans le milieu environnant [38].

---

7. Ce qui est fréquent dans les réactions neutre-neutre.

Cette hypothèse ne permet pas de rendre compte de toutes les observations, et plusieurs travaux récents cherchent à déterminer l'influence sur la chimie du phénomène d'intermittence dans la turbulence [30, 34, 62]. Celui-ci correspond à l'apparition d'objets localisés tel que des filaments de basse pression [12], ou encore de bouffées de dissipation vues comme de fortes fluctuations autour de la cascade d'énergie usuelle. Ces objets, qui ne sont pas forcément importants pour la compréhension de la turbulence en elle-même, sont pertinents dans l'étude des queues des distributions des champs de vitesse turbulents (et donc des profils de raie), et dans la recherche de foyers chimiques pour les espèces telles que  $CH^+$ .

Une autre approche de la même question est proposée par Spaans et al [97]. Ces auteurs ont mis en avant l'influence possible des distributions hors d'équilibre des incréments de vitesses dans le calcul des taux de réactions chimiques. Une distribution non Maxwellienne des vitesses relatives donne un taux plus élevé qui favorise la formation de ces espèces.

### Une dynamique bistable.

Une chimie complète du milieu interstellaire inclut entre 300 et 2000 réactions chimiques et régit l'évolution d'une centaine d'espèces. Les équations d'évolution peuvent se mettre sous la forme

$$\dot{\chi} = F(\chi, \alpha(T), \beta)$$

où  $\chi$ ,  $\alpha(T)$  et  $\beta$  correspondent à des vecteurs dont les éléments sont respectivement les concentrations des différents espèces, les taux de réaction associés à chacune des réactions, et divers paramètres physiques caractérisant l'environnement.

Ces équations incluent systématiquement des termes non-linéaires (voir [100]) et sont souvent raides<sup>8</sup>.

Le caractère non-linéaire des équations multiplie la gamme des comportements dynamiques à temps longs. Ces comportements asymptotiques sont les attracteurs du système dynamique considéré. Suivant les cas, l'attracteur que l'on voit émerger est stationnaire (point fixe), périodique (cycle limite), ou chaotique (attracteur étrange) [10, 100, 77]. Ces solutions coexistent parfois dans l'espace des phases. Lorsque qu'il s'agit de deux points fixes stables, on

---

<sup>8</sup>. Ce terme caractérise les systèmes dont le comportement temporel est contrôlé par des échelles de temps très différentes, rendant l'intégration numérique difficile. Il faut obligatoirement utiliser des schémas adaptés, tel que celui de "Gear" [41, 87].

TAB. 2.3 - Sélection d'abondances relatives à  $H_2$  pour deux états d'équilibre caractéristique des phases HIP et LIP d'un nuage sombre,  $n_H = 10^4 \text{ cm}^{-3}$  (modèle 2 de la référence [72]).

Espèces	HIP	LIP	Espèces	HIP	LIP
$O_2$	$3.8 \cdot 10^{-7}$	$3.3 \cdot 10^{-5}$	$OH$	$3.9 \cdot 10^{-9}$	$2.6 \cdot 10^{-8}$
$O$	$1.7 \cdot 10^{-4}$	$9.5 \cdot 10^{-5}$	$H_2O$	$3.1 \cdot 10^{-8}$	$1.8 \cdot 10^{-6}$
$C$	$7.6 \cdot 10^{-6}$	$2.6 \cdot 10^{-8}$	$CH$	$3.1 \cdot 10^{-9}$	$9.6 \cdot 10^{-11}$
$CO$	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$	$NH_3$	$3.5 \cdot 10^{-11}$	$1.6 \cdot 10^{-9}$
$CS$	$2.4 \cdot 10^{-8}$	$2.3 \cdot 10^{-10}$	$HCN$	$2.6 \cdot 10^{-9}$	$1.0 \cdot 10^{-9}$
$SO$	$4.2 \cdot 10^{-15}$	$1.6 \cdot 10^{-10}$	$H_2S$	$6.6 \cdot 10^{-13}$	$9.3 \cdot 10^{-10}$
$H^+$	$9.4 \cdot 10^{-8}$	$1.5 \cdot 10^{-9}$	$H_3^+$	$7.0 \cdot 10^{-10}$	$3.1 \cdot 10^{-9}$
$C^+$	$2.7 \cdot 10^{-8}$	$8.8 \cdot 10^{-10}$	$S$	$1.0 \cdot 10^{-6}$	$1.8 \cdot 10^{-16}$
$T(K)$	7.9	12	$e^-$	$9.6 \cdot 10^{-7}$	$4.4 \cdot 10^{-8}$
Marqueurs			Marqueurs		
$[C]/[CO]$	$6.9 \cdot 10^{-2}$	$2.2 \cdot 10^{-4}$	$[O_2]/[O]$	$2.2 \cdot 10^{-3}$	$3.5 \cdot 10^{-1}$

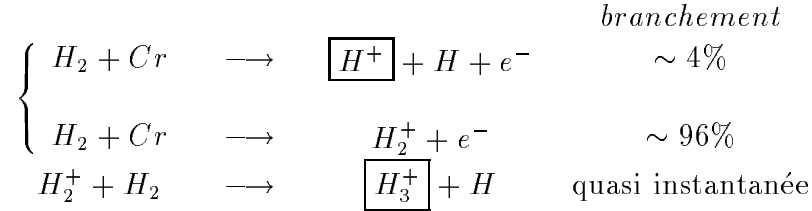
dira du système qu'il est bistable<sup>9</sup>.

Bien que la chimie du milieu interstellaire soit intensément étudiée depuis plus de 30 ans, la bistabilité potentielle des modèles a été identifiée récemment [71]. Les auteurs ont montré que deux phases fort différentes, caractérisées par un degré d'ionisation environ 10 fois plus faible dans un cas que dans l'autre, pouvaient apparaître dans des conditions physiques similaires (densité, température, ...). L'évolution vers l'une ou l'autre des solutions est déterminée par les conditions initiales. Nous reviendrons sur les implications dynamiques de ce résultat dans la suite de ce chapitre.

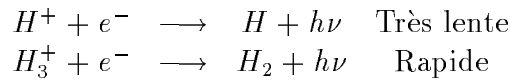
Les phases correspondantes sont appelées *HIP High-Ionization Phase* et *LIP Low-Ionization Phase*. On représente dans le tableau 2.1.3 les concentrations typiques de quelques espèces caractéristiques dans ces deux phases. La référence [74] est un article de revue récent sur les conditions d'apparition du régime de bistabilité dans des systèmes chimiques caractéristiques des nuages denses du milieu interstellaire. Nous allons décrire succinctement les mécanismes qui président à l'apparition de ces deux phases. Nous verrons également pourquoi les rapports de concentration  $[O_2]/[O]$  et  $[C]/[CO]$  sont de bons marqueurs de la bistabilité de cette chimie.

9. Cela ne s'applique en générale qu'à un sous-ensemble de l'espace des paramètres que l'on cherchera à déterminer.

Ces mécanismes sont principalement contrôlés par le degré d'ionisation et l'abondance relative de  $H^+$  et  $H_3^+$ . Tous deux sont formés à partir de  $H_2$  par collision avec les rayons cosmiques :

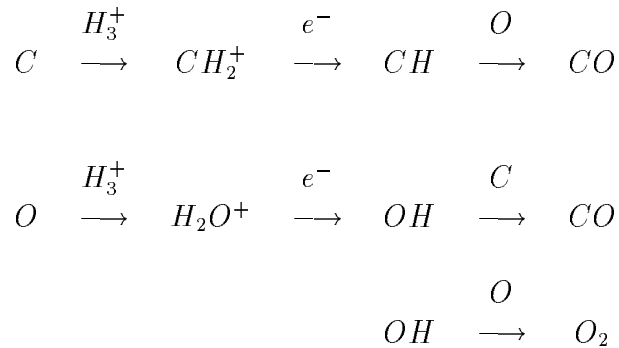


Les pertes “sèches” (i.e. improductives) se font par recombinaison électronique :

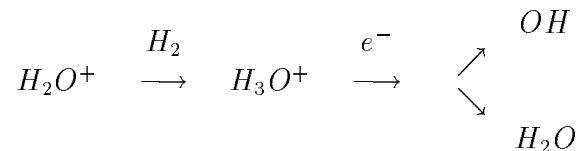


### Phase LIP.

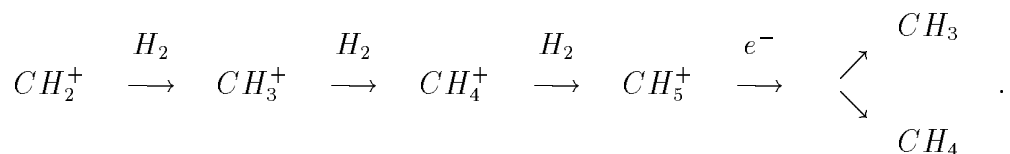
Si la densité d'électrons est suffisamment faible pour ralentir la recombinaison de  $H_3^+$ , on a les chaînes suivantes de conversions de  $C$  en  $CO$  caractéristiques de la phase LIP :



$CH_2^+$  et  $H_2O^+$  ne sont pas les seuls ions intermédiaires, et nous omettons beaucoup des réactions essentielles. A titre d'exemple, il faudrait notamment considérer

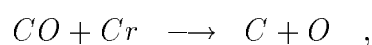


et



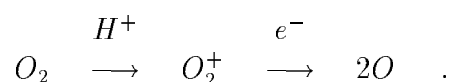
Mais globalement le principe reste le même : on consomme des atomes pour produire finalement des molécules saturées, dont  $CO$ . Le bilan net est que  $C$  est converti en  $CO$  et que l'oxygène restant se répartit entre  $O$  et  $O_2$ .

$CO$  est détruit en permanence par les rayons cosmiques



ce qui réalimente le milieu en  $C$  à un taux faible mais constant, le rapport  $[C]/[CO]$  étant alors faible dans cette phase.

Il existe une voie annexe à la formation de  $CO$  qui favorise l'apparition de la molécule  $O_2$ , dont le principal prédateur est  $H^+$  via la chaîne de réactions



On aboutit à un équilibre où le rapport  $[O_2]/[O]$  est de l'ordre de 1 dans la phase *LIP*.

### Phase HIP.

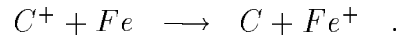
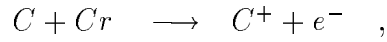
Si maintenant, on considère un cas où le degré d'ionisation est plus élevé, on observe la phase *HIP*.

La recombinaison de  $H_3^+$  est efficace et plus rapide que celle de  $H^+$ . Les principales voies de régénération de  $CO$  se ferment, permettant au carbone de survivre plus longtemps sous forme atomique. Du coup, la consommation de  $O_2$  par  $C$  devient efficace ce qui fait chuter le rapport  $[O_2]/[O]$ .

Le carbone est ionisé par les rayons cosmiques puis échange sa charge avec des métaux (symbolisés ici par  $Fe$ )<sup>10</sup>

---

10. Il faut noter qu'il y a là un usage, assez déroutant pour une personne n'appartenant pas à la communauté astrophysique, qui consiste à mettre dans la catégorie des "métaux" toutes sortes d'espèces selon des critères spécifiques au domaine concerné. Dans notre cas il s'agit des donneurs de charge, mais, par exemple, en nucléosynthèse primordiale, il s'agit de tous les atomes sauf l'hydrogène et l'hélium.



Le temps nécessaire à la recombinaison des porteurs est lent par rapport aux processus d'échange.

La présence de plus de carbone atomique neutre favorise donc (toutes choses égales par ailleurs) une forte abondance d'électrons qui elle même favorise un grand rapport<sup>11</sup>  $[C]/[CO]$ , caractérisant la phase *HIP*.

Certains des taux de réactions mis en jeu, sont mal connus, voire pas du tout. Dès lors, il est naturel de se demander si la bistabilité est un comportement robuste ou pas. Les auteurs de la référence [90] l'ont vérifié en faisant fluctuer les taux de réactions chimiques. Ils ont alors montré que les distributions de points fixes résultants, permettaient encore de définir aisément deux phases, bien distinctes.

Le rapport  $[C]/[CO]$  est donc un bon marqueur de la bistabilité de cette chimie. De plus, il influence significativement l'évolution du système car ces deux espèces contribuent significativement au refroidissement, et donc à l'observable astrophysique.

### 2.1.4 Formation de raies

Cet aspect du problème est d'un intérêt fondamental pour une étude astrophysique, car le rayonnement constitue l'essentiel de l'observable astrophysique.

Dans le cas des nuages moléculaires, le gaz émet du rayonnement lors de transitions radiatives entre états d'énergie différente. L'excès (émission) ou le défaut (absorption) d'énergie à certaines longueurs d'onde par rapport à une composante continue<sup>12</sup> forment ce que l'on appelle un spectre de raies. L'intensité intégrée de ces raies permet, après déconvolution d'éventuels effets de saturation, de remonter aux densités de colonne des différentes espèces contribuant à leur formation, et ensuite aux abondances locales moyennant quelques hypothèses sur la structure du milieu émetteur.

---

11. De l'ordre de  $10^{-1}$  et environ 100 fois plus élevé que dans la phase *LIP*.

12. Associée par exemple au corps noir cosmologique à  $3^{\circ}K$  ou au rayonnement thermique des poussières.

Si la résolution spectrale le permet, le détail du profil de raie est cependant beaucoup plus riche d'informations et son analyse fine permet de reconstituer l'ensemble de "l'histoire" du photon, de son point d'émission jusqu'à nous.

La complexité formidable du problème du transfert de rayonnement dans les raies oblige généralement à se limiter à des approximations "locales" dans lesquelles on suppose que les photons émis au sein du milieu n'ont pas d'influence à longue distance. Par exemple, l'approximation  $LVG$ <sup>13</sup> suppose qu'un gradient de vitesse global dans le milieu émetteur rend nulle la probabilité de réabsorption au delà du voisinage immédiat du lieu d'émission. On peut alors calculer une "probabilité d'échappement" qui ne dépend que des caractéristiques locales.

Si un processus extérieur impose sa dynamique, ces approximations sont en général suffisantes. Ainsi, au sein d'une région  $PDR$ <sup>14</sup>, la densité d'énergie interne décroît rapidement du bord vers l'intérieur du nuage, et les photons émis en profondeur n'affectent pas les zones externes mêmes s'ils sont réabsorbés.

En revanche, au sein d'une région complètement écrantée où aucun événement violent ne domine, toutes les "cellules" de gaz jouent un rôle équivalent indépendamment de leur plus ou moins grande distance aux bords. Ces effets de redistributions d'énergie n'ont alors plus de raison d'être négligeables et il devient impossible de déterminer l'état d'un site sans considérer simultanément l'ensemble des autres.

Même si la situation est un peu moins difficile que pour les cosmologistes, le physicien du milieu interstellaire ne peut aller sur place modifier l'amplitude de la contrainte exercée sur le milieu, et doit faire ce qu'il peut avec l'information qui lui parvient d'un échantillon fini de systèmes.

On est alors confronté à un problème dit inverse, puisque l'on doit remonter aux paramètres physiques locaux (densité, température, concentrations, intensité du rayonnement UV, ...) à partir des photons émis au sein des nuages et qui ont la malchance, pourtant très improbable, de venir se perdre sur les collecteurs des télescopes terrestres.

Une difficulté supplémentaire vient du fait que les acquisitions se font dans une direction donnée. Les spectres observés sont cumulés le long de la ligne de visée. L'information sur les systèmes est donc une projection à deux dimensions.

On récupère cependant une information partielle sur la distribution normale

---

13. Pour "Large Velocity Gradient".

14. Pour "Photon Dominated Region".



au plan du ciel grâce à l'effet Doppler qui décale la fréquence des photons. On peut dans certains cas mettre en évidence l'existence de plusieurs objets isolés de vitesses très différentes sur la ligne de visée, lorsque le profil de raie (associé sans ambiguïté à une transition unique) possède plusieurs maxima.

Mais ces profils multiples peuvent avoir d'autres origines et être le signe de processus liés au transfert de rayonnement. Les profils des raies sont fréquemment doubles lorsque la profondeur optique est élevée. Nous discuterons ce point plus en détail par la suite.

Il est en général nécessaire de confronter les résultats issus de l'étude de plusieurs raies pour conclure à la superposition de deux profils ou à une caractéristique intrinsèque au processus de formation.

Les largeurs de raies observées (de l'ordre du kilomètre par seconde alors que la largeur thermique est plutôt autour de  $0.1 \text{ km s}^{-1}$  pour *CO*) sont largement dominées par la contribution Doppler et montrent l'importance des caractéristiques du champ de vitesse (intermittence et distribution des incréments [30], corrélation et nombre de Mach [1, 64], ...).

Les observations nous donnent des renseignements sur ce qui s'échappe des nuages moléculaires, mais ne nous disent rien sur la répartition dans le système de ce qui a été réabsorbé. C'est une des difficultés majeures dans l'étude de la formation des profils de raie.

### 2.1.5 Synthèse, approches et modèles

Les différents points abordés précédemment nous ont montré le nombre "astronomique" de paramètres susceptibles d'influencer l'évolution des nuages moléculaires (taux de réactions chimiques, champ de vitesse turbulent, milieu compressible non-isotherme auto-gravitant, champ magnétique, système hors d'équilibre, transfert radiatif, évolution transitoire, ...).

On rappelle synthétiquement dans la figure 2.1 les différents champs impliqués, ainsi que les processus les couplant entre eux. Nous laissons de côté l'influence des fluctuations de densité et l'existence du champ UV et fixons notre attention sur le couplage entre la chimie, le champ de température et l'existence d'un champ de vitesse turbulent.

On notera que nous avons délibérément mis un point d'interrogation sur le lien symbolisant l'influence du champ de température sur le champ de vitesse. Il est en général considéré que la température se comporte comme un scalaire passif et est esclave du champ de vitesse. Nous allons voir que le transfert

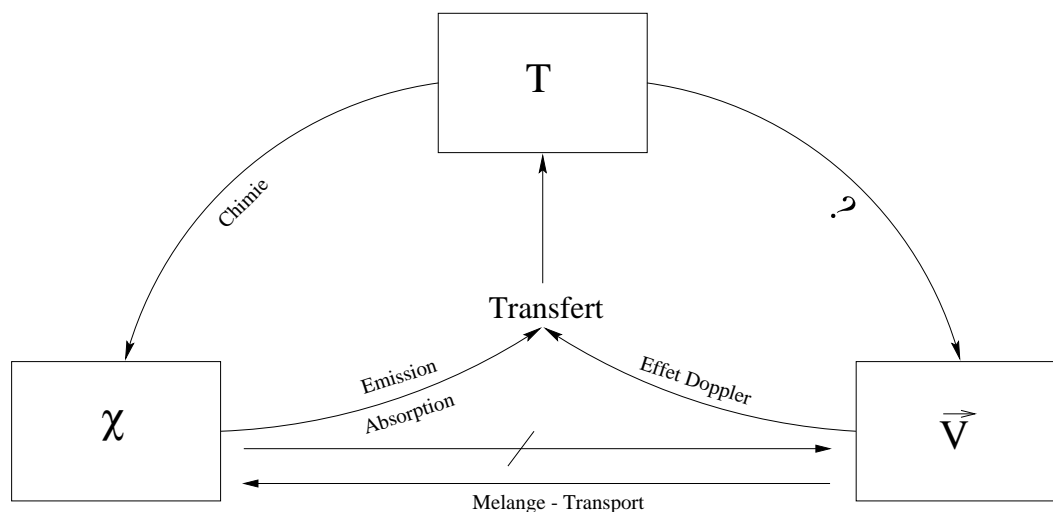


FIG. 2.1 - *Représentation synthétique des interactions entre les différents champs.  $\chi$  correspond aux différentes espèces chimiques,  $T$  représente le champ de température et  $\vec{V}$  est le champ de vitesse.*

radiatif induit vraisemblablement des gradients de température importants et fortement corrélés aux réalisations du champ de vitesse. Il n'est pas à exclure que ceux-ci influent significativement sur les caractéristiques du champ de vitesse turbulent, en prenant la forme d'une instabilité que l'on dira alors thermique.

Il est impossible à ce jour, et pour quelques années encore, d'étudier un modèle microscopique complètement cohérent (numériquement ou théoriquement). Les solutions accessibles passent par une réduction du problème, par exemple en fixant la température et en résolvant la chimie et le transfert dans une bulle de gaz uniforme immobile.

L'approche que nous avons utilisée, est plus phénoménologique, au détriment d'une description microscopique et donc quantitative. Nous avons développé un modèle de type système dynamique sur réseau, dont le détail et les résultats sont rapportés dans la section 2.2.

Pour que les résultats d'une approche qualitative, soient significatifs, il faut qu'ils soient robustes. C'est à dire peu sensibles aux variations des paramètres de contrôle. Par exemple, il ne s'agit pas de prédire quantitativement la position du domaine de bistabilité de la chimie des nuages moléculaires denses, mais plutôt de montrer que cette propriété apparaît dans un grand domaine de l'espace des paramètres.

Nous avons commencé (section 2.3) l'étude en terme de croissance de domaines de l'évolution d'un nuage moléculaire en montrant à quel point la bistabilité est une propriété cruciale des nuages moléculaires indépendamment du détail des processus microscopiques qui en sont à l'origine.

Nous verrons dans ces deux parties, que la structure de l'espace des phases de la dynamique locale est cruciale. Il est alors indispensable de développer les modèles microscopiques qui nous renseigneront sur cette structure. La section 2.4 est consacrée à un modèle semi-quantitatif de chimie pouvant inclure avec plus de finesse les spécificités de la chimie du milieu interstellaire, constituant ainsi une étape supplémentaire vers l'obtention de résultats directement confrontables aux observations.

## 2.2 Rôle du champ de vitesse

### 2.2.1 Introduction

Cette section contient l'article [91] présentant les résultats issus d'une approche de type "réseau d'itérations couplés" des nuages moléculaires. L'espace à une, deux ou trois dimensions est découpé en cellules de taille mésoscopique, supposant l'existence d'une échelle "naturelle" de discrétisation imposée, comme nous allons le voir, par les processus physiques. A chaque cellule est associée un ensemble de variables locales continues caractérisant l'état du gaz en son sein. Cela ne signifie pas que nous supposons constants la température, le champ de vitesse ou toute autre quantité physique, mais qu'à cette échelle seules les propriétés moyennes sont significatives.

Par exemple, on peut considérer que les fluctuations de vitesses hydrodynamiques dont l'amplitude est très inférieure à la vitesse d'agitation thermique sont négligeable lors de la résolution du transfert radiatif car elles n'y contribuent pas significativement. Dès lors, la description en terme de cellules de taille finie, couplées via le transfert radiatif, admet une longueur naturelle issue de la comparaison entre les vitesses microscopiques et mésoscopiques.

L'objectif de l'étude qui va suivre est de caractériser en terme d'interactions entre les cellules, l'influence d'un champ de vitesse turbulent dans une description phénoménologique complètement cohérente, incluant la chimie, la résolution du bilan thermique et la structure multi-échelle du champ de vitesse en régime de turbulence développée.

### 2.2.2 Commentaire préliminaire sur l'appendice A

Il est souhaitable à ce stade de détailler les interactions microscopiques conduisant à un terme de chauffage uniforme. Nous avons déjà dit que les émissions de photons se produisaient lors des transitions radiatives entre états excités. La résolution complète du transfert radiatif impose que l'on tienne compte *a priori* des populations de tous les états excités des molécules et atomes présents dans le milieu. La répartition instantanée sur les différents niveaux est donnée par le bilan entre les désexcitations (collisionnelles ou spontanées) et les excitations (collisionnelles ou induites).

Les collisions entre molécules à l'état de trace et les molécules  $H_2$  vont avoir tendance à "thermaliser" les populations des différents niveaux. Cela signifie

que les rapports de populations vont tendre vers la loi de Boltzmann

$$\frac{n^i}{n^j} = \frac{g_i}{g_j} \exp\left(\frac{E_{ij}}{kT}\right) \quad (2.2)$$

où  $n^i$  et  $n^j$  sont les populations des niveaux  $i$  et  $j$ ,  $g_i$  et  $g_j$  les poids statistiques,  $E_{ij}$  la différence d'énergie entre les niveaux  $i$  et  $j$ ,  $k$  la constante de Boltzmann et  $T$  la température. Cette relation nous permet de savoir comment l'énergie totale se répartie entre l'énergie interne et l'énergie cinétique des molécules.

Les désexcitations spontanées<sup>15</sup> et les excitations induites<sup>16</sup> sont à même de modifier cet équilibre. Les émissions spontanées de photons sont une perte d'énergie pour le gaz. Le sous-peuplement des niveaux excités va au bout d'un certain nombre de collisions induire le rétablissement de la distribution à l'équilibre mais à une température légèrement plus faible. De même, les excitations induites sont une source d'énergie si les collisions sont assez nombreuses. Dans les milieux très dilués, les collisions sont top rares pour assurer une thermalisation rapide des populations des états excités, et les échanges d'énergies thermiques et radiatives par ce mécanisme restent faibles<sup>17</sup>.

Dans l'article qui va suivre nous avons regardé la correction induite par les désexcitations spontanées en négligeant les réabsorptions. Lorsque la densité est suffisamment élevée,  $A_{ij} / n_{H_2} K_{ij} \ll 1$ , celle-ci reste faible. C'est une approximation évidemment important si l'on souhaite faire une comparaison avec les observations réelles. Cependant nous nous sommes concentrés dans cet article sur les processus de redistribution à l'échelle du système sans chercher à obtenir une représentation quantitative des propriétés locales du milieu.

Par ailleurs, même dans les régions opaques au rayonnement ultra violet, la dissipation visqueuse est un mécanisme efficace de chauffage. Cependant, le champ de vitesse que nous avons considéré est scalaire et ne permet pas pour l'instant de prendre en compte ce mécanisme.

### 2.2.3 “Lattice model of dense molecular cloud”

---

15. Qui s'accompagnent d'une émission de photon.

16. Qui s'accompagnent d'une absorption de photon.

17. Il y a cependant d'autres mécanismes efficaces, tel que le chauffage photoélectrique et la dissipation visqueuse (voir introduction).









































### 2.2.4 Erratum

Une erreur s'est glissée dans l'estimation du gradient de vitesse moyen  $\langle |\partial_i v_i| \rangle$  qui n'est pas de l'ordre de  $\sqrt{2\pi/\lambda_{\max}}\sigma$  comme cela est indiqué. Nous allons voir qu'une estimation correcte donne  $2\pi\sigma/\lambda_{\max}$ .

Les "filaments" de température élevée, qui apparaissent sur la Fig. 9 de l'article, sont liés aux propriétés du champ de vitesse. Dans ce régime la température est approximativement égale au terme de chauffage effectif<sup>18</sup>, et est fonction du champ de vitesse local comme nous l'avons montré sur la Fig. 8. On peut constater que la variation de cette fonction dans les ailes est plus raide qu'une gaussienne. La composante la plus chaude est approximativement associée à des vitesses comprises dans l'intervalle  $[-q\sigma, q\sigma]$ , avec  $q = 0.75 \pm 0.25$ .

Les filaments séparent des domaines très rapprochés où les vitesses sont grandes et de signes opposés. Dans le cas que nous avons considéré — c'est à dire pour les valeurs choisies de  $\alpha$ ,  $\lambda_{\max}$  et  $\lambda_{\min}$  — ces variations rapides de grande amplitude autour de la vitesse moyenne, sont associées à l'échelle la plus grande  $\lambda_{\max}$ <sup>19</sup>.

On représente sur la Fig. 2.2, le profil de vitesse associé à une modulation sinusoïdale  $v(x) = \sqrt{2}\sigma \cos(2\pi x/\lambda_{\max} + \pi/2)$  (pour  $\sigma = 2$  et  $\lambda_{\max} = 32$ ) et deux projections délimitant les régions chaudes autour de  $v(x) = 0$  pour  $q = 0.5$  et  $q = 1$  à partir du gradient local  $\partial_x v(0) = \sqrt{8}\pi\sigma/\lambda_{\max}$

La largeur  $l$  des filaments que l'on obtient est donnée par

$$l = q \frac{\lambda_{\max}}{\sqrt{2}} \pi \quad , \quad (2.3)$$

c'est à dire  $3 < l < 8$  pour  $q \in [0.5, 1]$ .

Il ne faut pas oublier que le champ de vitesse que nous avons considéré n'est pas un champ de vitesse réel et qu'il n'est pas question de dire que ces filaments existent ou sont reliés à des objets observés dans de vrais écoulements turbulents. Afin d'aller dans cette direction, Il est possible d'utiliser certains écoulements obtenus par simulation directe des équations de Navier-Stokes afin d'identifier les objets émergant de la structure tridimensionnelle<sup>20</sup>.

18. Les  $x_i$  sont compris entre 2 et 40 et donc  $T_i = (x_i^3 + x_i)/(x_i^2 + p) \simeq x_i$ .

19. On pourra compter environs  $2L/\lambda_{\max} = 256/32 = 8$  régions froides (i.e. sombres) sur une longueur du système.

20. Dans ce cas, il faudra tenir compte des effets de projection du champ de vitesse qui peuvent significativement diminuer l'amplitude des fluctuations de température puisqu'ils correspondent à une moyenne dans les trois directions d'espace.



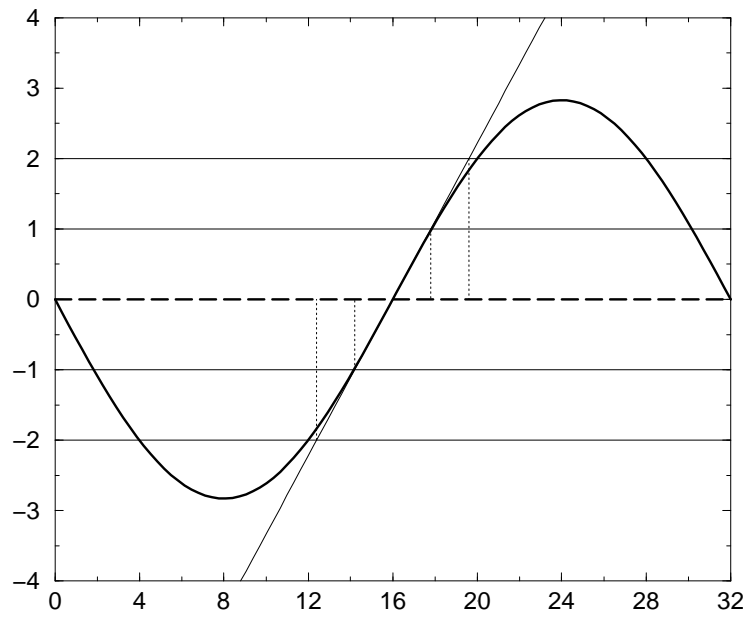


FIG. 2.2 - Représentation schématique du mode de détermination de la largeur des zones chaudes apparaissant sur la Fig. 9. La ligne en trait épais est le profil de vitesse sinusoïdale ( $\lambda_{\max} = 32$  et  $\sigma = 2$ ). Les lignes horizontales correspondent à  $q = 1$  et  $q = 0.5$ .

### 2.2.5 Conclusions - Perspectives

Les résultats présentés dans cet article, bien que difficilement confrontables aux observations, montrent qu'une description en terme de réseau d'itérations couplées permet effectivement de mettre en évidence des phénomènes collectifs, qui ont une influence sur les spectres observés, et qui sont inaccessibles aux approches traditionnelles.

Nous avons notamment montré qu'il existe un couplage spatial original et spécifique au transfert radiatif, où toutes les échelles sont présentes et contrôlées par les propriétés du champ de vitesse.

Il y a tout d'abord une échelle locale<sup>21</sup> correspondant au voisinage immédiat des cellules émettrices, dans lequel le champ de vitesse varie suffisamment peu pour qu'il n'y ait pas de découplage total. Ce sont alors les propriétés locales (densités, température, concentrations, ...) qui régulent le taux de réabsorption dans ce voisinage. En plus de cette longueur, il y a toutes celles associées aux fluctuations à grande distance du champ de vitesse<sup>22</sup>. Elles caractérisent la décroissance exponentielle de la probabilité d'absorption d'un photon émis d'une cellule à une vitesse donnée.

Dans le cas d'un champ de vitesse turbulent, ces longueurs couvrent un large domaine des longueurs accessibles et le couplage n'est ni local, ni global.

Nous avons également synthétisé des spectres dans des conditions où l'échelle d'injection de l'énergie reste inférieure à la taille du système. Pourtant, nous avons observé de gros effets de réalisation avec des profils très dissymétriques. Dans le cas des nuages du milieu interstellaire, l'échelle d'injection est *a priori* plus grande ou de même ordre que les longueurs sur lesquelles se forment les raies. Il est vraisemblable que ces effets de réalisation soient aussi forts lors de la formation des profils de raie *in situ*.

#### Perspectives

L'approximation la plus forte concerne sans doute le caractère stationnaire du champ de vitesse. Les temps caractéristiques d'évolution à une échelle donnée dépendent de celle-ci. On peut dire grâce à des arguments dimensionnels, que le temps typique de retournement  $\tau$  des structures de nombre d'onde  $k$ , varie comme  $k^\beta$  où  $\beta$  est relié au spectre de puissance [39, 35].

---

21. Notée  $L_e$  dans l'article.

22. Notée  $L_c(v)$  dans l'article.

Cela implique qu'il existe une échelle caractéristique où le temps de retournement est du même ordre que le temps d'évolution chimique. Cette longueur dépend a priori des espèces considérées et définit une limite en dessous de laquelle les fluctuations du champ de vitesse sont trop rapides pour être significatives. Au contraire à des échelles beaucoup plus grandes, on peut considérer que le champ de vitesse est quasi-statique.

Les solutions pour générer un champ de vitesse non stationnaire sont multiples et un travail prospectif reste à faire pour déterminer la plus adaptée. Nous laissons cet aspect de côté et revenons à la problématique initiale.

La première partie de ce chapitre a été principalement consacrée à l'influence du champ de vitesse, et à son rôle dominant dans la résolution du transfert radiatif. Jusqu'à présent, nous n'avons pas eu besoin de tenir compte de la bistabilité de la chimie pour décrire les mécanismes responsables des phénomènes que nous avons observés. Il existe certains processus dynamiques apparaissant spécifiquement dans des systèmes bistables. Nous y consacrons la section suivante.

## 2.3 Stabilité de front et bilan thermique

La section précédente a montré comment le couplage entre les différents champs pouvait aboutir à l'existence de solutions non uniformes stationnaires, sous l'influence d'une distribution hétérogène de paramètres effectifs, dominés par le champ de vitesse.

Cette première approche n'a pas montré l'importance de la bistabilité dans l'évolution du système, et nous allons nous intéresser maintenant à l'émergence de comportements spécifiques aux systèmes bistables.

La première conséquence directe de la bistabilité est qu'il existe deux solutions uniformes stationnaires. Indépendamment de cette coexistence, chacune de ces deux solutions peut être instable face à des perturbations d'amplitude infinitésimale. On peut classer de façon naturelle ces instabilités à partir de des nombres d'onde et fréquences caractéristiques des modes les plus instables.

Il n'est pas question d'étudier ici les mécanismes aboutissant à la déstabilisation d'une de ces solutions uniformes et nous renvoyons le lecteur à la référence [23] pour une revue exhaustive de la question. Nous supposons dans la suite de cette section que les deux solutions uniformes sont stables vis à vis de perturbations infinitésimales de longueur d'onde quelconque.

Nous nous attacherons à décrire des régimes où la dynamique bistable joue un rôle prédominant. Nous incluons tout de même le transfert radiatif et la diffusion, tout en restant à un niveau phénoménologique, afin de garantir la robustesse des résultats.

On supposera par ailleurs que les conditions initiales sont suffisamment éloignées d'un de ces états uniformes pour que l'analyse de stabilité linéaire ne soit plus significative.

Dans ce cadre très général, un système initialement très désordonné va rapidement converger vers un état où coexistent des domaines de tailles variables facilement identifiables à un des deux états stables de la dynamique. Ces domaines sont séparés par des zones de transition assimilées à des fronts.

Les auteurs des références [52, 44] montrent que l'étude des comportements à temps long de ces systèmes, passe par l'étude de la dynamique des fronts séparant les domaines.

A ce stade, il nous faut signaler qu'il y a déjà dans la littérature astrophysique des cas d'application des notions que nous allons présenter ([95, 3] et celles qui y sont citées).

Ces auteurs ont plus particulièrement étudié les instabilités thermiques qui en découlent et leurs applications aux disques d'accrétion.

Ils se limitent par ailleurs au cas à une variable locale (en l'occurrence la température), ce qui, nous le verrons, est à l'origine de nombreuses simplifications.

Nous allons dans les sections qui suivent présenter certaines de ces notions de base en nous appuyant principalement sur les résultats présentés dans les références [52, 44]. Nous en tirerons des conditions favorables à l'émergence de comportements "non triviaux".

Le milieu interstellaire, en raison des multiples temps caractéristiques qui contrôlent sa chimie, et des interactions à longue portée induites par le transfert radiatif, est un système où ces comportements sont susceptibles d'apparaître.

### 2.3.1 Système de type réaction-diffusion

Nous allons dans un premier temps, procéder à une mise en équation formelle du problème que nous nous sommes posés.

Nous considérons le cas d'un système composé des deux espèces les plus significatives dans le refroidissement. Nous les notons  $X$  et  $Y$ , et supposons qu'elles vérifient  $X + Y = 1$ . Cette hypothèse est réaliste pour  $C$  et  $CO$ , et ne fait que refléter la conservation du nombre de noyaux atomiques de carbone dans le système. On impose en plus à cette relation d'être vérifiée en tout point de l'espace ce qui suppose que les noyaux de carbones sont répartis uniformément dans le système, et qu'il n'y a pas de découplage entre les différents fluides qui le compose [35].

Ces atomes ou molécules sont soumis à un processus de diffusion qui représente le mécanisme de transport le plus efficace à l'échelle considérée<sup>23</sup>. L'évolution temporelle des concentrations en chaque point de l'espace est *a priori* une fonction de toutes les concentrations et de la température. L'évolution de la température, quant à elle, suppose que l'on résolve le bilan thermique local en incluant le transfert radiatif.

L'évolution d'un système étendu de ce type est régie par un ensemble d'équations aux dérivées partielles prenant la forme :

---

<sup>23</sup>. Ici, il s'agit de diffusion turbulente

$$\dot{X} = F(X, Y, T) + D_X \Delta X \quad (2.4)$$

$$\dot{Y} = G(X, Y, T) + D_Y \Delta Y \quad (2.5)$$

$$\dot{T} = \Gamma(X, Y, T) - \Lambda(X, Y, T) + D_T \Delta T \quad (2.6)$$

où  $D_X$ ,  $D_Y$  et  $D_T$  sont les coefficients de diffusion associés aux variables  $X$ ,  $Y$  et  $T$ ,  $\Delta$  est le Laplacien usuel.

Les fonctions  $F$  et  $G$  caractérisent l'évolution des concentrations locales selon les règles de la cinétique chimique [100].

Les fonctions  $\Gamma$  et  $\Lambda$  sont respectivement les termes de chauffage et de refroidissement locaux. Le premier inclut le chauffage par interactions avec les rayons cosmiques, et les réabsorptions des photons émis au sein du nuage. Le second caractérise le refroidissement par désexcitation spontanée et ne dépend que des propriétés locales du milieu.

A cause de l'hypothèse  $X + Y = 1$ ,  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendants et on obtient en substituant  $1 - X$  à  $Y$  dans l'Eq. 2.5, les contraintes  $F(X, Y) = -G(X, Y)$  et  $D_X = D_Y$ . Dans la pratique cela signifie que l'Eq. 2.5 n'a pas à être intégrée.

L'équation d'évolution de la température découle d'arguments déjà présentés dans la section précédente. On se contentera d'écrire les fonctions  $\Gamma$  et  $\Lambda$  sous la forme

$$\Gamma(X, Y, T) = \Gamma_{cr} + \text{Réabsorptions} \quad (2.7)$$

$$\Lambda(X, Y, T) = X R_X(T) + Y R_Y(T) \quad (2.8)$$

où les fonctions  $R_X$  et  $R_Y$  proviennent de la dépendance des populations relatives des différents niveaux énergétiques en fonction de la température et de la transition considérée.

Il reste alors à caractériser le terme de réabsorption. Pour un système unidimensionnel borné, l'accroissement de température<sup>24</sup> est directement relié à la variation d'intensité du rayonnement.

Soit  $I(\nu, z, z', t)$  l'intensité du rayonnement à la fréquence  $\nu$  au point  $z$  après avoir traversé la distance le séparant du point d'émission  $z'$  (on néglige

---

24. Rappelons qu'il est le résultat de la thermalisation des populations des niveaux énergétiques des molécules ou atomes considérés, et suppose que la densité soit suffisamment élevée. Voir les appendices de l'article constituant la Sect. 2.2.3.

ici le temps de trajet). Dès lors on peut écrire :

$$\begin{aligned} \dot{T}(z, t) &= \Gamma_{cr} - \Lambda + D_T \Delta T \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu \int_{z_{min}}^{z_{max}} dz' \frac{\partial I}{\partial z} . \end{aligned} \quad (2.9)$$

Nous supposons que les émissions et réabsorptions ont principalement lieu via deux raies monochromatiques associées aux espèces  $X$  et  $Y$ . C'est à dire  $I(\nu, z, z', t) = I_X(z, z', t)\delta(\nu - \nu_X) + I_Y(z, z', t)\delta(\nu - \nu_Y)$ . Et finalement on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{T}(z, t) &= \Gamma_{cr} - \Lambda + D_T \Delta T \\ &+ \int_{z_{min}}^{z_{max}} \left\{ \frac{\partial I_X}{\partial z} + \frac{\partial I_Y}{\partial z} \right\} dz' . \end{aligned} \quad (2.10)$$

Si l'on note  $\kappa_X(z, z', t)$  le taux de décroissance de l'intensité du rayonnement à la longueur d'onde de la transition associée à l'espèce  $X$  tel que

$$\frac{\partial I_X}{\partial z}(z, z', t) = -\kappa_X(z, z', t)I_X(z, z', t) , \quad (2.11)$$

on obtient formellement l'expression :

$$I_X(z_2, z', t) = I_X(z_1, z', t) \exp\left(-\int_{z_1}^{z_2} \kappa_X(z'', z') dz''\right) . \quad (2.12)$$

Par définition,  $I_X(z', z', t)$  est le terme de source qui a été utilisé dans l'équation 2.8, et on peut finalement exprimer le terme de réabsorption sous la forme :

$$\frac{\partial I_X}{\partial z}(z, z', t) = -X(z') R_X(T(z')) \kappa_X(z, z', t) \exp\left(-\int_z^{z'} \kappa_X(z'', z') dz''\right) \quad (2.13)$$

Les équations 2.4, 2.10, 2.13 et la condition  $X + Y = 1$  constituent le système d'équations intégro-différentielles régissant le comportement du système.

Dans cette représentation, le transfert radiatif apparaît explicitement comme un terme de couplage entre les cellules, décroissant plus ou moins exponentiellement<sup>25</sup>.

---

25. Rappelons que la décroissance n'est exponentielle qu'en moyenne. Même si il n'y a pas de champ de vitesse, il peut tout de même y avoir des domaines de l'espace qui ne sont pas couplés si la concentration de l'espèce absorbante  $y$  est très faible.

### 2.3.2 Forme variationnelle et fonction de Lyapunov

Nous savons qu'à l'équilibre thermodynamique et dans son voisinage les points de fonctionnement du système sont discutables en terme d'extrema des potentiels thermodynamiques ou du taux de production d'entropie. Loin de l'équilibre il n'y a pas de méthode permettant de trouver systématiquement une fonction de ce type. Cependant, lorsqu'une telle fonction existe on l'appelle fonction de Lyapunov. Nous allons analyser dans la section suivante un cas où nous savons dériver l'expression de cette fonction, et verrons les conséquences que nous pouvons en tirer.

Dans un premier temps nous considérerons la température constante, et avons donc le système suivant:

$$\dot{X} = F(X, 1 - X, T) + \Delta X \quad . \quad (2.14)$$

Nous oublions pour l'instant que la température est une grandeur physiquement définie positive et ne retenons de la fonction  $F$  que le fait qu'elle puisse donner lieu à une dynamique bistable lorsque l'on varie la température. Le détail de la fonction importe peu dans ce qui suit et nous considérons le cas le plus simple de fonction  $F$  possédant les propriétés évoquées<sup>26</sup>

$$F(X, 1 - X, T) = X - X^3 - T \quad (2.15)$$

L'équation 2.14 admet une forme variationnelle indépendamment de l'expression exacte de  $F$  [54],

$$\dot{X} = -\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta X} \quad (2.16)$$

$$\text{avec } \mathcal{F} = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left[ \mathcal{E}(X, T) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial X}{\partial z} \right)^2 \right]}_{\mathcal{H}(X, X_z)} dz \quad , \quad (2.17)$$

$$\text{et } F = -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial X} \quad ,$$

$$\text{soit } \mathcal{E}(X, T) = -\frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{4}X^4 + TX \text{ dans le cas 2.15} \quad . \quad (2.18)$$

---

26. Bistabilité en fonction d'un paramètre de contrôle.



Par abus de langage on dira de  $\mathcal{E}$  qu'il s'agit de la densité d'énergie libre. L'emploi de ce vocabulaire vient du fait que l'énergie libre est le potentiel thermodynamique qui est minimisé dans un système fermé à l'équilibre en contact avec un thermostat. Nous allons voir qu'ici aussi la fonction  $\mathcal{F}$ , pour peu qu'elle admette un minimum, peut servir de potentiel généralisé car elle est strictement décroissante.

La démonstration de l'Eq. 2.16 à partir de l'expression que nous avons donnée de  $\mathcal{F}$ , fait appel à quelques subtilités rarement mentionnées dans la littérature<sup>27</sup>. Nous noterons juste que dans le cas où  $\mathcal{H}$  n'est fonction que des champs  $X$  et  $X_z = \partial X / \partial z$ , la dérivée variationnelle de  $\mathcal{F}$  est donnée par

$$\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta X} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta X} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X} - \frac{d}{dz} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X_z} \quad . \quad (2.19)$$

Pour que cette expression soit exacte, il faut ajouter une condition de régularité sur  $H$

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X_z} = 0 \quad , \quad (2.20)$$

signifiant que le champ  $X$  est uniforme à l'infini.

Cette contrainte est rarement mentionnée bien qu'elle soit nécessaire comme nous allons le voir pour démontrer que  $\mathcal{F}$  est une fonction strictement décroissante.

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{F}}{dt} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mathcal{H}}{dt} dz' \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X} \frac{dX}{dt} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X_z} \frac{dX_z}{dt} \right) dz \quad . \end{aligned} \quad (2.21)$$

On utilise alors les égalités

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X} &= \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial X} \\ &= -F \\ &= -\dot{X} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (2.22)$$

---

27. On pourra consulter les références [28, 3, 103] pour le détail des développements mathématiques liés à la notion de dérivée variationnelle. Elles sont classées par ordre croissant de technicité.

et

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X_z} = \frac{\partial X}{\partial z} \quad , \quad (2.23)$$

pour finalement obtenir

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{F}}{dt} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( -(\dot{X})^2 + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} \dot{X} + \frac{\partial \dot{X}}{\partial z} \frac{\partial X}{\partial z} \right) dz \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( -(\dot{X})^2 + \frac{\partial}{\partial z} [\dot{X} X_z] \right) dz \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} (\dot{X})^2 dz + \underbrace{\left[ \dot{X} \frac{\partial X}{\partial z} \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0 \text{ Eq. 2.20}} \quad . \end{aligned} \quad (2.24)$$

Cette propriété est remarquable dans la mesure où elle montre que si la densité d'énergie libre  $\mathcal{E}$  admet un minimum, le système ne peut évoluer que vers un état stationnaire ( $\dot{X}(z) = 0 \quad \forall z$ ).

Cette notion est très utile dans les systèmes à petit nombre de degrés de liberté car elle va au delà de la notion de stabilité linéaire, en s'appliquant également aux perturbations d'amplitude finie [77]. Elle est néanmoins plus délicate à manipuler dans les systèmes spatialement étendus comme nous allons le voir dans les sections suivantes, car la fonction de Lyapunov peut prendre des valeurs infinies.

### 2.3.3 Stabilité globale

Suivant les valeurs prises par  $T$ , la dynamique locale admet un ou trois points fixes, correspondant aux solutions de l'équation  $F(X, 1 - X, T) = 0$ , mais qui sont aussi par définition les extrema de la densité d'énergie libre  $\mathcal{E}$ . On représente sur la figure 2.3 les différents cas caractéristiques.

Nous considérons maintenant le cas  $T \gg 1$ . Le seul point fixe est tel que  $X_0 \simeq -T^{1/3}$ . La densité d'énergie libre admet un minimum absolu en  $x_0$ . On peut alors faire la transformation  $\mathcal{E}'(X, T) = \mathcal{E}(X, T) - \mathcal{E}(X_0, T)$ , et la fonction de Lyapunov est définie positive.

La fonction de Lyapunov nous permet maintenant d'associer à chaque condition initiale une distance la séparant du seul état stationnaire existant.

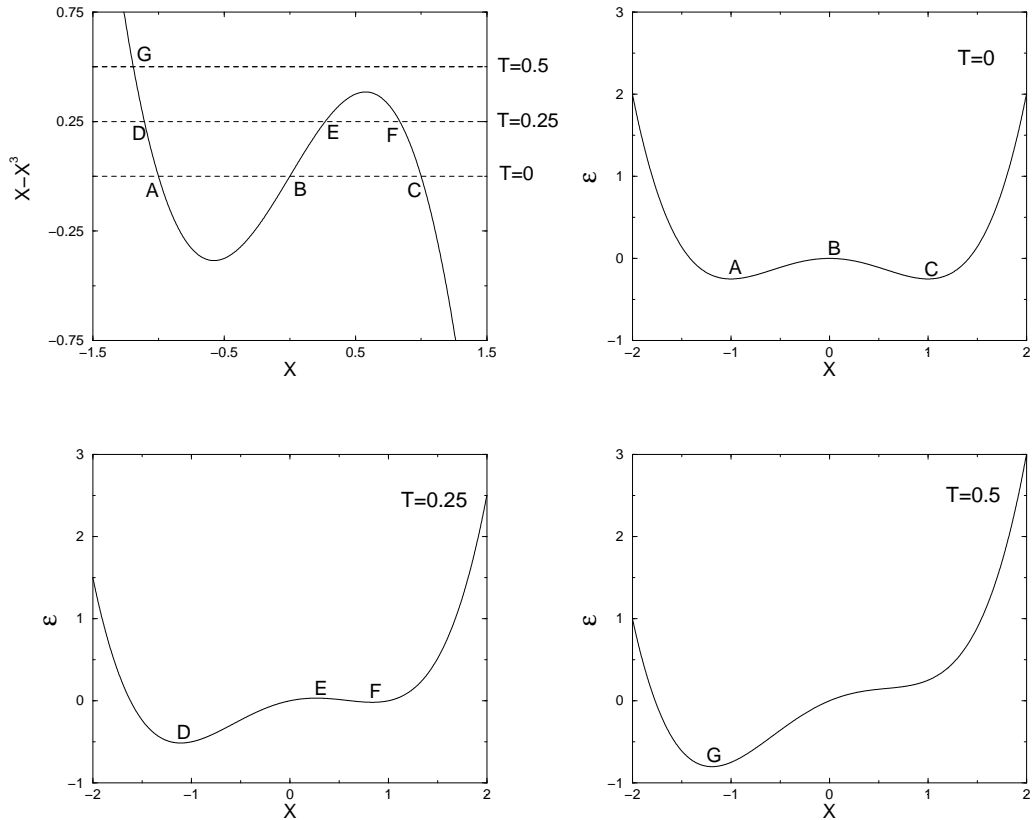


FIG. 2.3 - Détermination des points d'équilibre par intersection des fonctions  $X = F(X, 1 - X, T)$  et  $X = T$  pour trois valeurs différentes de la température  $T = 0, 0.25, 0.5$  (en haut à gauche), et densité d'énergie correspondante: ● en haut à droite  $T = 0$ , cas symétrique avec un point fixe instable  $B$  et deux points fixes équistables  $A$  et  $C$ , ● en bas à droite  $T = 0.25$ , un point fixe instable  $E$ , deux points fixes stables  $D$  et  $F$ .  $\mathcal{E}\{D\} < \mathcal{E}\{F\}$  et donc l'état  $D$  est plus stable que l'état  $F$ . ● en bas à droite  $T = 0.5$  un seul point fixe stable.

Cette fonction est strictement décroissante et donc toutes les conditions initiales telles que  $\mathcal{F}$  est finie, convergent vers l'état stationnaire  $X(z) = X_0 \forall z$ . On parlera dans ce cas de stabilité globale monotone.

### 2.3.4 Bistabilité et Croissance de domaines

Pour  $T$  compris entre  $-2/(3\sqrt{3})$  et  $2/(3\sqrt{3})$  la densité d'énergie libre  $\mathcal{E}$  admet 3 extrema dont 2 sont stables. On se pose alors la question de l'existence de solutions reliant les deux phases stables (notées  $X^+$  et  $X^-$ ) à l'infini avec un front se propageant à vitesse constante  $c$ .

#### Propagation de fronts à vitesse constante

Nous nous plaçons pour cela dans un repère en translation uniforme, et définissons une nouvelle coordonnée spatiale  $Z = z - ct$ . La solution recherchée est telle que

$$\frac{\partial^2 X}{\partial Z^2} + c \frac{\partial X}{\partial Z} + F(X, 1 - X, T) = 0 \quad (2.25)$$

avec les conditions aux limites<sup>28</sup>

$$\begin{aligned} \lim_{Z \rightarrow +\infty} X(Z) = X^+ & \quad , & \quad \lim_{Z \rightarrow +\infty} \frac{\partial X}{\partial Z}(Z) = 0 \\ \lim_{Z \rightarrow -\infty} X(Z) = X^- & \quad \text{et} & \quad \lim_{Z \rightarrow -\infty} \frac{\partial X}{\partial Z}(Z) = 0 \quad . \end{aligned}$$

Nous allons montrer que la vitesse de propagation a le même signe que la différence de densité d'énergie libre entre la phase  $X^+$  et  $X^-$ .

Pour cela nous multiplions l'Eq. 2.25 par  $X_Z = \partial X / \partial Z$  et l'intégrons entre  $-\infty$  et  $+\infty$ . Nous obtenons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\partial X}{\partial Z} \frac{\partial^2 X}{\partial Z^2} + c \left[ \frac{\partial X}{\partial Z} \right]^2 + \frac{\partial X}{\partial Z} F \right) dZ = 0 \quad (2.26)$$

$$\iff \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\partial X}{\partial Z} \frac{\partial^2 X}{\partial Z^2} + c \left[ \frac{\partial X}{\partial Z} \right]^2 - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial Z} \right) dZ = 0 \quad (2.27)$$

---

28. Le choix qui consiste à mettre l'état  $X^+$  en  $+\infty$  et l'état  $X^-$  en  $-\infty$  est arbitraire, et le cas inverse est tout aussi pertinent.

Dans la seconde équation, nous avons utilisé les égalités

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial Z} F &= -\frac{\partial X}{\partial Z} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial X} \\ &= -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial Z} . \end{aligned} \quad (2.28)$$

Finalement, nous pouvons isoler le terme dépendant de la vitesse du front, et obtenons en nous servant des conditions aux limites

$$c \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\partial X}{\partial Z} \right]^2 dZ = \mathcal{E}(X^-, T) - \mathcal{E}(X^+, T) + \underbrace{\left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial X}{\partial Z} \right)^2 \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} \quad (2.29)$$

Le terme intégral du membre de gauche est défini positif, et on obtient le résultat souhaité : il existe une solution invariante par translation dont le sens de propagation est donné par le signe de la différence des densités d'énergie à l'infini.

## Discussion

A une dimension, nous venons de voir que le sens de propagation du front est imposé par la différence de densité d'énergie entre les deux états stables de la dynamique locale.

Cela signifie que la surface associée à l'état le plus stable croît au détriment de l'état le moins stable<sup>29</sup>. Nous observons alors un régime de croissance de domaines où l'un des deux états envahit l'autre. Le temps de convergence vers la solution uniforme dépend de la vitesse des fronts et de la distribution des tailles des domaines nucléés (voir Fig. 2.4, gauche).

Ce régime est qualitativement très différent de celui qu'on observe lorsqu'il y a un point fixe unique. Dans ce cas le système converge en tous points vers la solution uniforme indépendamment de la taille des domaines initiaux (voir Fig. 2.4, droite).

---

<sup>29</sup>. L'état le plus stable est celui pour lequel la densité d'énergie libre est un minimum absolue. Du point de vue des systèmes dynamiques, c'est l'état pour lequel la valeur propre négative, associée à la dynamique linéarisée au voisinage des points fixes, est la plus grande en valeur absolue.

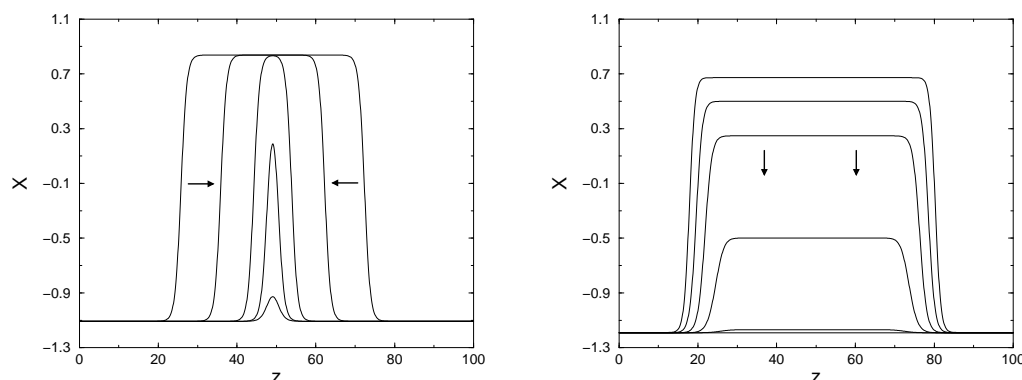


FIG. 2.4 - Évolution d'une "bulle" instable au sein de la phase la plus stable. Pour  $T = 0.25$  à différents temps caractéristiques (à gauche) où deux points fixes existent et où l'on observe la formation de fronts grignotant la phase la moins stable; puis  $T = 0.5$  (à droite) où la dynamique de fronts ne peut exister car il n'existe qu'un point fixe. On observe alors la convergence rapide vers la solution uniforme en tout point du système. Intégration des équations 2.4 et 2.15.

Cette différence de comportement durant le "transitoire", n'est pas anodine pour des systèmes tels que les nuages moléculaires. Comme nous l'avons souligné dans l'introduction, ces systèmes sont en général dans un environnement assez agité. Des perturbations importantes mais localisées dans le temps<sup>30</sup> empêchent l'établissement d'un régime permanent.

Cela signifie que les systèmes que l'on observe n'ont pas forcément eu le temps de relaxer vers un régime permanent. Dès lors, la bistabilité de la dynamique locale est un processus important dans l'interprétation des données observationnelles dans la mesure où le comportement induit dans le transitoire le rallonge significativement.

Les tentatives d'interprétation en supposant la coexistence sur la ligne de visée des deux phases chimiques (voir [42]), montrent que les observations ne sont pas incompatibles avec cette hypothèse.

En dimension plus élevée, les effets de courbure viennent modifier ce scénario. On peut dans ce cas dériver un terme, assimilable à une tension de surface,

30. Par exemple le passage de l'onde de choc d'une supernova, une collision entre deux nuages, ou encore le passage d'un des bras de l'onde spirale parcourant la galaxie.

venant s'ajouter à la densité d'énergie libre. Obtenir l'expression de ce terme est assez technique et nous laissons le lecteur consulter les références [3, 44, 69], s'il souhaite approfondir cette question.

Ces effets de courbures sont dominants à partir d'une certaine taille caractéristique, en dessous de laquelle une "bulle", bien que composée de l'état plus stable, rétrécit. Cette situation n'est pas la plus courante, car il suffit qu'il y ait un domaine de l'état le plus stable plus grand que cette taille caractéristique, pour que le système tende vers une solution uniforme dans cette phase. C'est ce que l'on a représenté sur la Fig. 2.5.

Lorsqu'il y a équistabilité, les fronts à une dimension sont de vitesse nulle. À deux et trois dimensions, les effets de courbure sont les seuls contrôlant la propagation des fronts. On observe alors un régime de croissance de domaines non trivial, où la taille des domaines croît algébriquement avec le temps<sup>31</sup> sans qu'aucune des deux phases ne prenne le dessus (voir Fig. 2.6) Pour un traitement plus complet de cet aspect, le lecteur pourra consulter les références [9, 69].

### 2.3.5 Bifurcation de fronts

Nous allons montrer que des comportements plus riches peuvent apparaître lorsque la dynamique du système introduit des échelles de temps ou des longueurs spatiales différentes pour deux champs distincts. Dans notre cas il s'agira des champs de température  $T$  et de concentration  $X$ .

#### Echelles de temps multiples

Nous étudions maintenant le cas où la température n'est plus constante, mais évolue plus lentement que la variable associée à la concentration.

Cette situation n'est pas vraisemblable du point de vue du milieu interstellaire mais la discussion est à un niveau phénoménologique. Seule l'existence de deux temps d'évolution différents sera significative pour la suite de la discussion.

Pour illustrer notre propos nous allons considérer une dynamique linéaire en  $X$  et  $T$  contrôlant les variations de  $T$ :

$$\dot{X} = X - X^3 - T + \Delta X \quad (2.30)$$

---

<sup>31</sup>. Comme  $t^{1/2}$ .

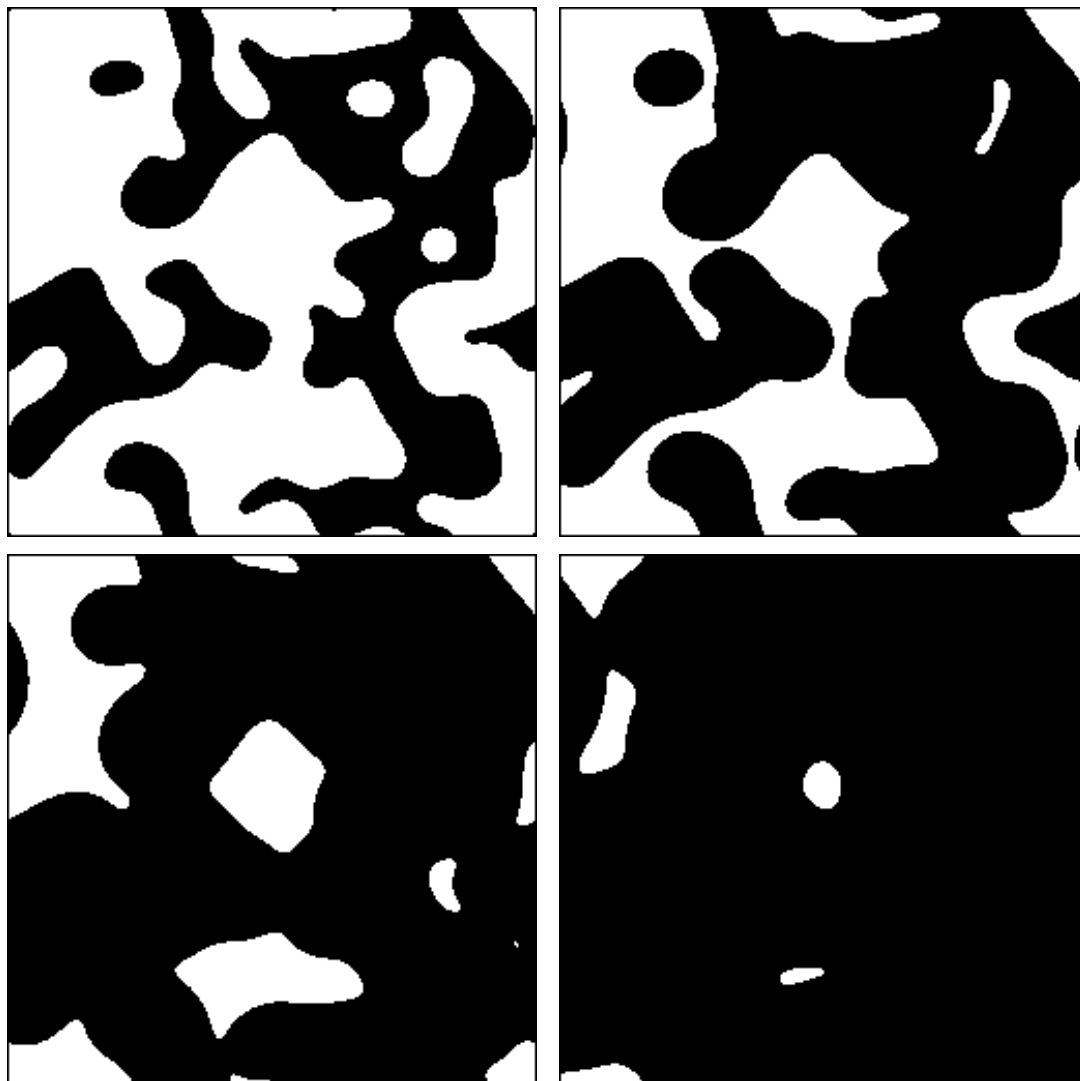


FIG. 2.5 - Croissance de domaines 2D typique du cas bistable asymétrique.  $T = 0.25$  à partir d'un état extrait de la série correspondant à la figure 2.6, toujours pour les équations modèles 2.4 et 2.15. De gauche à droite et de bas en haut  $t = 0.5, 1, 1.5$  et 3). Les conditions aux limites sont périodiques.



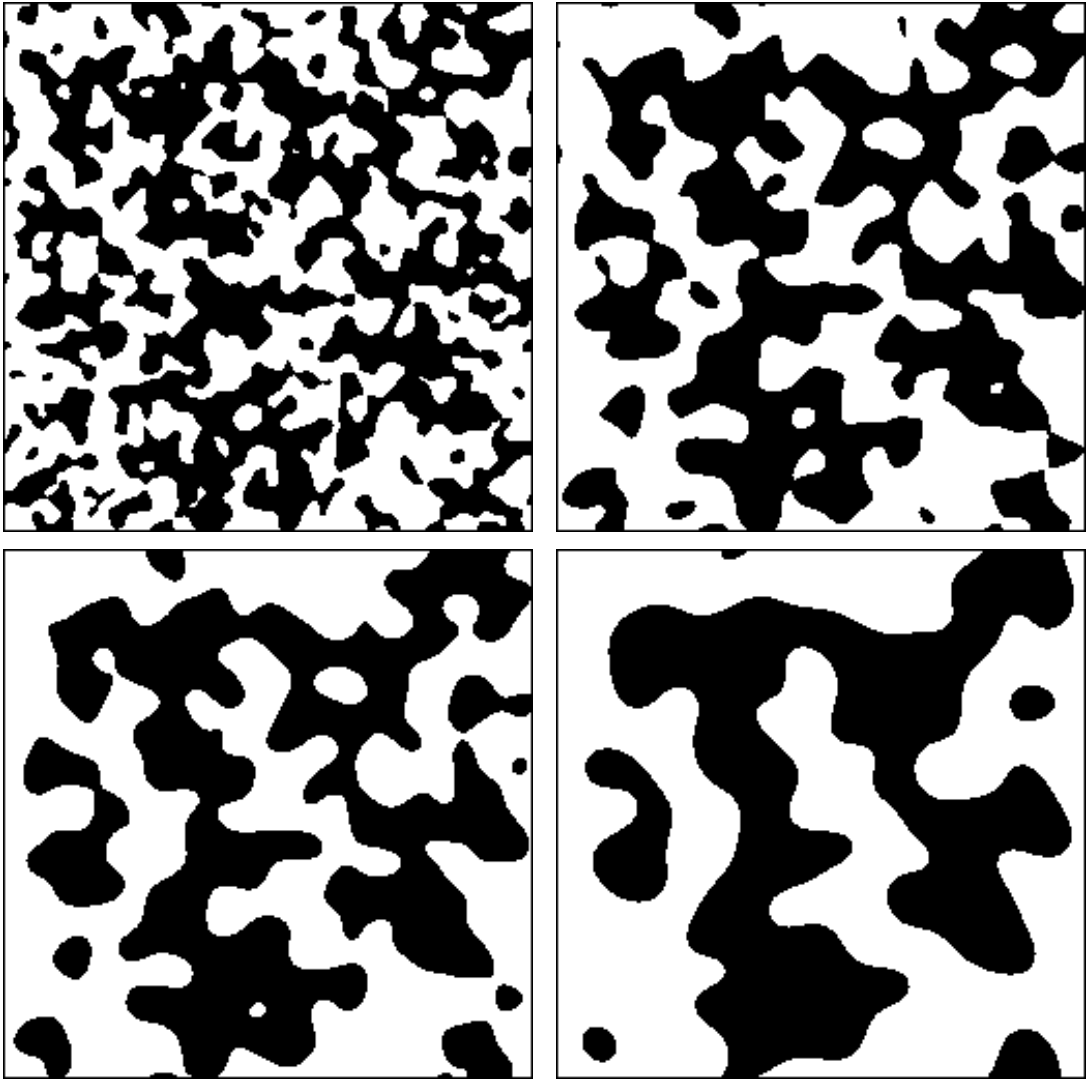


FIG. 2.6 - Croissance de domaines algébrique 2D typique du cas bistable symétrique.  $T = 0$  pour les équations modèles 2.4 et 2.15, de gauche à droite et de haut en bas  $t = 1.5, 4.5, 7.5$  et 20 en partant d'une distribution aléatoire uniforme. Les conditions aux limites sont périodiques.

$$\dot{T} = \epsilon(X - aT - b) + \gamma\Delta T \quad . \quad (2.31)$$

Ce système d'équations est connu sous le nom de modèle de *Fitzhugh – Nagumo* [36, 83]. La simplicité du terme de réaction et la variété des comportements observés, en ont fait un système modèle pour tous les problèmes de formation de “motif” (“pattern”) dans les systèmes spatialement étendus [23].

Les états d'équilibre uniformes linéairement stables  $(X^+, T^+)$  et  $(X^-, T^-)$  sont tels que

$$X^\pm \left(1 - \frac{1}{a} - X^{\pm 2}\right) = \frac{b}{a} \quad \text{et} \quad T^\pm = \frac{X^\pm - b}{a} \quad .$$

L'hypothèse de variation lente de la température signifie que l'on considère la limite  $\epsilon \ll 1$ . Nous allons montrer que dans ce cas, il existe deux solutions de type front, connectant les mêmes états uniformes à l'infini mais se propageant dans des directions différentes.

Nous définissons une condition initiale constante par morceaux :

$$\begin{aligned} X(z, 0) &= X^+ \quad \text{si } z < z_X \\ &= X^- \quad \text{si } z > z_X \\ \\ T(z, 0) &= T^+ \quad \text{si } z < z_T \\ &= T^- \quad \text{si } z > z_T \quad , \end{aligned}$$

où  $z_X$  et  $z_T$  sont respectivement les points de discontinuité du champ de concentration et du champ de température (voir Fig. 2.7, figures du haut).

Nous considérons tout d'abord le cas  $z_X < z_T$ . La contrainte  $\epsilon \ll 1$  nous permet de considérer que le champ de température reste à peu près constant pendant que le front au voisinage de  $z_X$  commence à se propager. On est alors ramené au cas précédent<sup>32</sup> en fixant  $T = T^+$ . Le vitesse du front qui apparaît est approximativement donnée par la différence de densité d'énergie libre (voir Eq. 2.29),  $c_+ \propto \mathcal{E}(X^+, T^+) - \mathcal{E}(X^-, T^+)$ .

Nous faisons de même pour le cas  $z_X > z_T$ , en fixant  $T = T^-$ , et obtenons un front de vitesse  $c_- \propto \mathcal{E}(X^+, T^-) - \mathcal{E}(X^-, T^-)$ .

Il n'y a rien qui oblige ces deux vitesses à être de même signe. Nous montrons sur la Fig. 2.7, un cas où ces deux vitesses sont de signes opposés, et correspondent à deux fronts distincts.

Dans ce cas, l'existence de deux échelles de temps distinctes pour la température et la concentration est à l'origine de la multiplicité des solutions de type front.

---

<sup>32</sup>. A température constante et concentration variable.

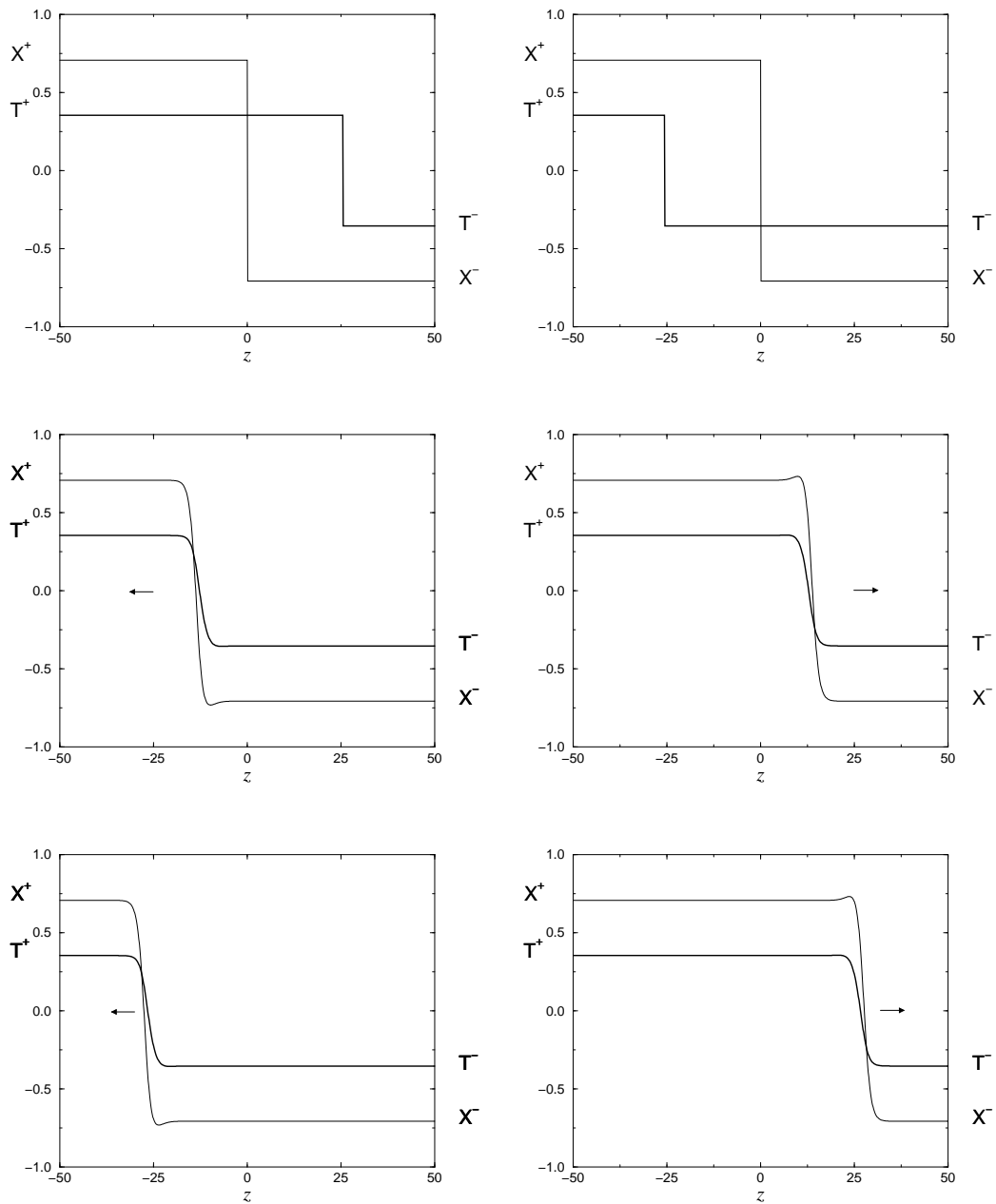


FIG. 2.7 - Solution du système de Fitzhugh-Nagumo à trois temps différents (de haut en bas)  $t = 0, 26$  et  $56$ , pour deux conditions initiales différentes  $z_X < z_T$  (gauche) et  $z_X > z_T$ . Les paramètres du modèle sont  $\epsilon = 0.2$ ,  $a = 2$ ,  $b = 0$  et  $\gamma = 0$ . On observe dans un cas l'apparition d'un front de vitesse négative provoquant la régression de la phase ( $X^+, T^+$ ), et réciproquement l'apparition d'un front de vitesse positive provoquant la régression de la phase ( $X^-, T^-$ ).

### Forme variationnelle

La multiplicité des fronts n'est pas indépendante des propriétés de la densité d'énergie. On peut comme précédemment mettre le système d'équation différentielle sous forme variationnelle :

$$\dot{X} = -\frac{\delta Q_X}{\delta X} - \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta X} \quad (2.32)$$

$$\dot{T} = -\frac{\delta Q_T}{\delta T} + \epsilon \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta T} \quad (2.33)$$

avec

$$\mathcal{Q}_X\{X\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ -\frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{4}X^4 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial X}{\partial z} \right)^2 \right] dz \quad (2.34)$$

$$\mathcal{Q}_T\{T\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ +\frac{\epsilon a}{2}T^2 + b\epsilon T + \frac{\gamma}{2} \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] dz \quad (2.35)$$

$$\mathcal{G}\{X, T\} = \int_{-\infty}^{+\infty} [XT] dz \quad . \quad (2.36)$$

Mais contrairement au cas à une variable, aucune de ces fonctions (seules ou additionnées) n'est uniformément décroissante dans le temps, et il n'y a plus rien nous garantissant la convergence du système vers une solution stationnaire.

Les auteurs des références [44, 52, 53] ont montré comment la multiplicité des fronts et leurs interactions peuvent aboutir à des solutions localisées stationnaires (ou non) où coexistent les deux états stables de la dynamique locale sans qu'il y ait équistabilité. Cela signifie que le régime de coexistence est beaucoup plus robuste que ce que laisse croire l'analyse du cas à une variable.

Dans les systèmes bidimensionnels, les effets de courbures sont à l'origine d'instabilités transverses donnant naissance à des motifs de type labyrinthe. Nous montrons sur la Fig. 2.8, une de ces solutions extraite de la référence [53].

Nous allons conclure sur un des développements qui nous amènera à discuter explicitement le rôle particulier joué par le transfert radiatif dans le milieu interstellaire.

### Echelles spatiales multiples

L'argumentation montrant l'existence de plusieurs fronts n'est plus valable dans la limite  $\epsilon$  tend vers l'infini car la température devient esclave de la concentration et est toujours à l'"équilibre instantané"  $T = (X - b)/a$ . Dès

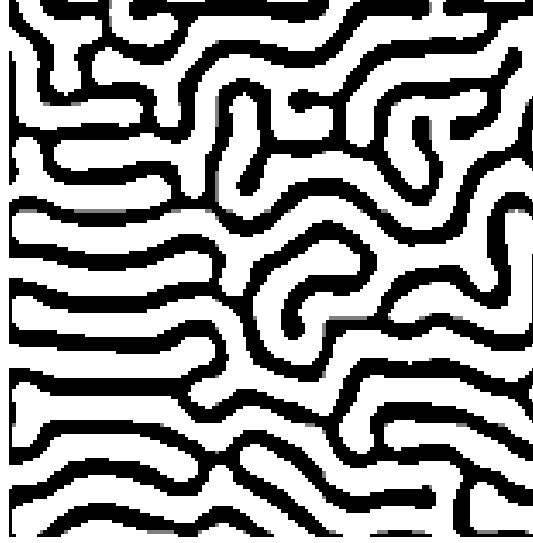


FIG. 2.8 - Exemple de régime stationnaire de type labyrinthe découlant de l'existence d'une répulsion entre les fronts. Extrait de la référence [53].

lors, le système n'a qu'une seule variable indépendante, et l'analyse se réduit à celle précédemment faite dans le cas variationnel.

Les auteurs de la référence [44] ont introduit une subtilité supplémentaire, en prenant la limite  $\epsilon \propto \gamma \rightarrow \infty$ . Dans ce cas les équations d'évolution sont

$$\dot{X} = X - X^3 - T + \Delta X \quad (2.37)$$

$$\left(\frac{\gamma}{a\epsilon}\Delta - 1\right) T = -\frac{X - b}{a} \quad (2.38)$$

On fait alors le changement de variable  $z' = z\sqrt{a\epsilon/\gamma}$  et il vient

$$\dot{X} = X - X^3 - T + \frac{a\epsilon}{\gamma}\Delta X \quad (2.39)$$

$$\Delta T - T = -\frac{X - b}{a} \quad (2.40)$$

Connaissant le champ  $X$  en tous point  $z$  au temps  $t$ , la fonction de température solution de l'équation 2.40 à une dimension est<sup>33</sup>

$$T(z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{X(z', t) - b}{2a} \exp(-|z - z'|) dz' \quad . \quad (2.41)$$

---

33. Voir la référence citée pour la démonstration.

Et finalement l'équation totale d'évolution dérivant de ces équations s'écrit

$$\dot{X} = X - X^3 - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{X(z', t) - b}{2a} \exp(-|z - z'|) dz' + \frac{a\epsilon}{\gamma} \Delta X \quad . \quad (2.42)$$

Cette équation dérive d'un potentiel qui peut servir à définir une fonction strictement décroissante, mais contrairement au cas précédent elle n'est plus bornée par les valeurs inférieures. Les auteurs décrivent alors les mécanismes d'apparition de solutions de type labyrinthe, telles que celle de la Fig. 2.8.

L'intégrale de l'Eq. 2.42 s'interprète comme un couplage à longue distance pouvant stabiliser des configurations où plusieurs fronts sont en interactions. Dans le cas des nuages moléculaires denses, le couplage radiatif est à même d'introduire ces longueurs de couplage différentes (Voir Sect. 2.2). On peut de plus remarquer la similitude formelle entre l'équation 2.42 et les équations 2.10, 2.13 dans le cas où le taux d'absorption est constant.

### 2.3.6 Synthèse et applications

La compréhension des mécanismes de sélection des solutions localisées stationnaires ou non stationnaires dans les systèmes bistables, passe par une description en termes de dynamique de fronts [52, 44, 59, 80].

Les différentes études sur la stabilité des fronts dans un système du type réaction-diffusion bistable montrent qu'elle est génériquement liée à l'existence de plusieurs temps d'évolution caractérisant les différentes variables locales, ou différentes longueurs d'interactions.

Les équations 2.4, 2.10, 2.13 présentent tous les éléments nécessaires à l'émergence des comportements que nous avons décrit :

- Des variables locales contrôlées par des temps caractéristiques d'évolution pouvant être très différents qu'il s'agisse des concentrations des différentes espèces chimiques ou de la température.
- Des longueurs caractéristiques de couplage très différentes : Les échelles de couplage radiatif sont principalement contrôlées par le champ de vitesse, et sont a priori plus grandes que les échelles diffusives (identiques pour toutes les espèces chimiques en phase gazeuse).

Cependant, il ne faut pas hâtivement conclure à l'existence fréquente de structures localisées dans le milieu interstellaire sur des arguments aussi qualitatifs. Nous avons montré dans cette section que le milieu interstellaire possède

tous les éléments nécessaires à l'apparition de structures hétérogènes stationnaires.

Ceux-ci font intervenir des propriétés telles que les constantes de diffusion, les temps caractéristiques d'évolution de chaque espèce, ainsi que les propriétés des différentes raies significatives. Ces données ne sont accessibles que par l'étude quantitative des processus microscopiques en jeu, sans que cela signifie que tous doivent être inclus.

C'est dans cette perspective que nous avons développé un modèle minimal de chimie du milieu interstellaire qui, couplé à la résolution du transfert radiatif, doit constituer une première étape dans l'obtention de données quantitatives confrontables aux mesures observationnelles.

## 2.4 Construction d'une chimie réduite

### 2.4.1 Introduction

Nous avons montré comment les différents champs (concentration, température, vitesse, ...) pouvaient agir les uns sur les autres pour finalement provoquer l'apparition de comportements spécifiques.

L'objectif à terme de toute modélisation est d'aboutir à une prédiction confrontable aux observations. Pour cela, il nous faut absolument aller au delà d'une description purement phénoménologique. En quelque sorte, nous avons montré que tel ou tel processus pouvait exister, et il s'agit de savoir s'il est effectivement présent et significatif dans les systèmes observés. Cela renvoie directement à la définition des bonnes quantités à observer. Cet aspect ne peut être discuté que si l'on dispose de modèles au moins semi-quantitatifs<sup>34</sup>.

Les modèles exhaustifs de chimie du milieu interstellaire contiennent plus d'une centaine d'espèces et environ un millier de réactions. Nous avons vu dans la Sect. 2.3, que la structure de l'espace des phases est un élément important dans la description des comportements observés. Les paramètres importants sont dans ce cas la multistabilité ou encore l'existence de temps caractéristiques distincts.

Il est nécessaire d'obtenir une chimie réduite rendant quantitativement compte de la variété des temps d'évolution ou de la structure fine de l'espace des phases. L'article qui suit propose un exemple de réduction et compare le système résultant à une chimie complète typique. De plus, nous nous imposons l'utilisation de variables dimensionnées, indispensables si l'on souhaite à terme inclure cette chimie dans des modèles plus complexes<sup>35</sup>.

### 2.4.2 “The meudonator : a bistability kit for the interstellar chemistry”

---

34. Comme nous l'avons souligné dans l'introduction, il est irréaliste d'envisager un traitement complet des processus chimiques, du transfert radiatif et de la turbulence.

35. On pourrait par exemple envisager l'étude des propriétés de transport et de mélange [19, 60] dans un milieu turbulent à partir de ce type de modèle.























### 2.4.3 Conclusion

La comparaison explicite entre le modèle réduit de chimie et une chimie complète montre que ce système, bien que ne contenant que 6 variables indépendantes, est à même de reproduire quantitativement l'existence d'une région ionisée en bord de nuage, puis atomique et finalement moléculaire pour les plus profondes. En ce sens le premier objectif est rempli.

Deuxièmement, la faible dimension de l'espace des phases a rendu possible son étude systématique. Nous avons montré que les courbes en "S" n'étaient probablement pas les seules formes de bistabilité. Il existe aussi des sections où les domaines de bistabilité correspondent à l'apparition d'une "île" formée par les nouveaux points fixes.

Ce cas est plus difficile à observer car il n'y pas de mécanisme d'hystérésis permettant de passer sur tous les points stables en variant les paramètres de contrôle. Il est vraisemblable qu'une recherche spécifique montrerait ce type de section.

Finalement, ce système permet de commencer une étude de type dynamique de front. Il est suffisamment simple pour être utilisé sur des réseaux à une, deux ou trois dimensions.

## 2.5 Conclusion

### 2.5.1 Synthèse

Nous avons tout d’abord montré comment un modèle de type “réseau d’itérations couplées” pouvait prendre en compte certains aspects de la complexité de systèmes tels que les nuages moléculaires.

Nous avons introduit la redistribution au sein du système des photons émis par désexcitations spontanées. Cette redistribution est assimilable à un couplage entre les sites dont les propriétés sont essentiellement dominées par les caractéristiques du champ de vitesse que nous avons jusqu’à présent considéré stationnaire.

La probabilité d’échappement d’un photon du système est fortement corrélée à la vitesse du point d’émission, alors que toutes les cellules sont équivalentes du point de vue de l’énergie qu’elles absorbent par interaction avec les rayons cosmique. Les cellules dont la vitesse est proche de la valeur moyenne ne contribuent pas significativement au refroidissement global du système. En effet, les photons qui y sont émis croisent beaucoup de cellules dont les vitesses sont suffisamment proches pour que la probabilité de réabsorption soit grande. En régime stationnaire, ces cellules reçoivent autant d’énergie qu’elles en évacuent. La seule possibilité est que cette énergie aille se déposer sur les cellules de vitesse plus élevée.

Ce flux d’énergie est un mécanisme de refroidissement très efficace, diminuant significativement la température au coeur du système. Paradoxalement, cela signifie que ce qui s’échappe du système et compose les raies que nous observons, est émis par une fraction relativement faible des cellules composant le système. De plus, ces cellules sont celles où la température est la plus faible, induisant ainsi un biais observationnel et une sous estimation de la température moyenne.

Dans un second temps, nous nous sommes intéressés à l’émergence de comportements spécifiquement liés à la bistabilité des processus chimiques apparaissant au sein des nuages moléculaires denses. Nous avons essentiellement replacé dans le contexte du milieu interstellaire des résultats issus de la littérature concernant la “formation de motifs”<sup>36</sup>.

Nous avons montré que la multiplicité des temps caractéristiques liés aux processus chimiques et l’existence de couplages à longue portée sont susceptibles d’induire des bifurcations de fronts. Ces fronts sont les objets de base

---

36. “Pattern formation” en anglais.

permettant l'apparition de structures localisées stationnaires ou non. Les longueurs caractéristiques associées à ces structures ne sont pas imposées par un changement de propriétés du milieu (e.g. une modulation des paramètres ou du champ de vitesse qui permettrait de définir des paramètres effectifs).

Les nuages moléculaires denses remplissent potentiellement ces conditions d'apparition de comportements non triviaux. Cependant, une étude plus approfondie ne peut faire abstraction des différences quantitatives pouvant exister entre deux systèmes : il ne suffit pas de dire qu'il existe deux temps caractéristiques distincts. Nous devons estimer si cette différence est suffisante pour que le phénomène décrit se produise.

Cela passe par la réduction des processus chimiques à un petit nombre de réactions conservant à un niveau semi-quantitatif les propriétés de la chimie complète. Cette réduction est dépendante de l'objectif que nous voulons atteindre. Nous avons donné un exemple de réduction qui permet de conserver les caractéristiques principales de la chimie du carbone.

A partir de ce système de 6 équations différentielles, nous avons fait une étude systématique de l'espace des phases suggérant que celui-ci est plus riche que ce que les études à partir d'une chimie complète ont jusqu'à présent montré. Il y a en fait un biais "observationnel" favorisant l'apparition de courbe de bistabilité de type "S", au détriment des sections de type "île".

Quoi qu'il en soit, on peut identifier sans difficulté les régimes associés aux phases *HIP* et *LIP* observées dans les modèles complets.

### 2.5.2 Perspectives

Le système chimique réduit est une "brique élémentaire" pouvant facilement et à moindre coût numérique être implantée dans des modèles incluant par exemple le transfert radiatif sur *C* et *CO*. On peut sans difficulté imaginer le traitement de situations bidimensionnelles et tridimensionnelles, avec des temps d'intégration très inférieurs à ceux correspondant à une approche complètement microscopique.

Une autre voie consiste à prendre en compte l'évolution temporelle du champ de vitesse. Il est évidemment hors de question de simuler les équations hydrodynamiques dans les conditions du milieu interstellaire, mais plutôt de simuler les propriétés d'un champ de vitesses turbulent. Les études du type de celle présentée dans la référence [79] sont à même de donner les outils nécessaires à ces simulations.

### 2.5.3 Epilogue

Nous espérons avoir montré que la modélisation à un niveau phénoménologique de systèmes tels que les nuages moléculaires apporte un éclairage différent, complémentaire des approches plus microscopiques.

Nous pensons également que ces systèmes, dont les physiciens théoriciens pensent souvent qu'ils sont trop compliqués pour qu'on puisse en tirer quelque chose qui ne soit pas de l'ordre du détail, sont au contraire à même de faire surgir des problématiques nouvelles. Le lien entre le couplage radiatif et la structure multi-échelle du champ de vitesse turbulent, en est un exemple.

Les résultats que nous avons obtenus sont suffisamment stimulants pour que nous poursuivions dans cette direction.

## Chapitre 3

# Intermittence spatio-temporelle et universalité

### 3.1 Introduction

#### 3.1.1 Contexte physique

Les systèmes ouverts maintenus hors d'équilibre sous l'action d'une contrainte extérieure (gradient de température, écoulement cisaillé, . . .) sont les plus courants dans la nature. Lorsque la contrainte est suffisamment forte, on observe des comportements spatio-temporels désordonnés permanents que l'on regroupe dans la catégorie des régimes turbulents au sens large.

On distingue plusieurs types de régimes turbulents. Nous avons déjà rencontré le cas de la turbulence développée, dont l'étude est rendue difficile par l'interaction d'un grand nombre de structures (tourbillons) de tailles très variables couvrant en général l'ensemble des longueurs comprises entre la taille du système et l'échelle de dissipation [39].

Il existe un autre type de turbulence, dite parfois "faible" [77], qui s'observe généralement dans des systèmes où la contrainte extérieure est moins intense. Elle se distingue principalement du cas précédent par l'existence d'une longueur caractéristique associée aux structures localisées en interaction. Dans le régime dit laminaire, par opposition au régime turbulent, elles forment un motif régulier (par exemple une succession de cellules de Rayleigh-Bénard en convection thermique [24, 25, 14], voir Fig. 3.1).

Le désordre spatio-temporel porte alors sur la position de ces structures (turbulence de phase), l'existence de défauts (turbulence d'amplitude), ou encore la coexistence de plusieurs états locaux au sein du même système. Dans



FIG. 3.1 - *Vue dans le plan vertical d'un alignement unidimensionnel de cellules convectives de Rayleigh-Bénard, au dessus du seuil d'instabilité thermique. Les cellules forment un motif régulier associé à l'état laminaire. Extrait de [25].*

ce dernier cas, la distribution spatiale et l'évolution temporelle des domaines, composés de chacun de ces états, sont désordonnées (intermittence spatio-temporelle).

On représente sur la Fig. 3.2, une photo instantanée de l'écoulement de Couette plan où l'on peut voir plusieurs spots turbulents entourés de domaines laminaires. Le nombre, les positions et les formes de ces spots évoluent de façon désordonnée dans le temps.

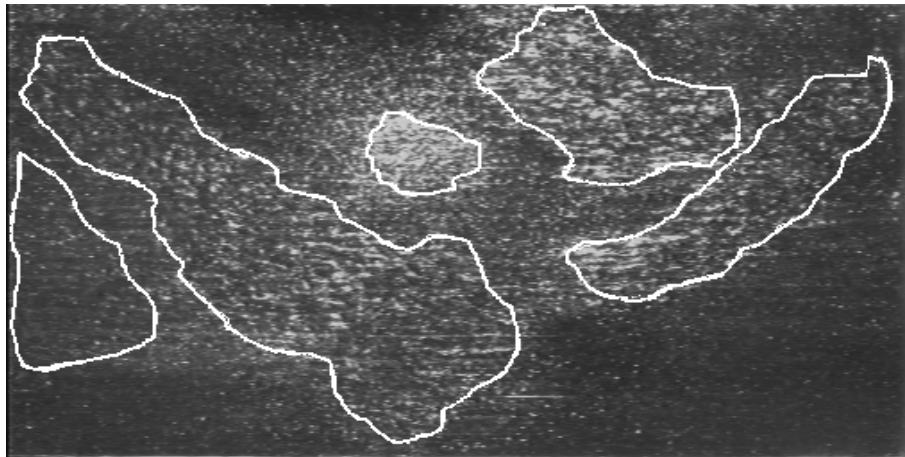


FIG. 3.2 - *Image bidimensionnelle de l'écoulement de Couette plan, où coexistent cinq spots turbulents (délimités par un contour blanc) au milieu de domaines laminaires. Extrait de [5]*

Cette définition, au sens large, inclut le cas où deux points fixes linéairement stables coexistent dans l'espace des phases local<sup>1</sup>. On est alors ramené aux problèmes de croissance de domaines et de dynamique de fronts, tel qu'ils ont été présentés dans le chapitre consacré à la modélisation des nuages moléculaires denses. L'évolution des domaines, bien que complexe, n'est pas source

1. L'espace des phases est l'espace des états accessibles au système.

de désordre dans la mesure où on observe la réorganisation spatiale d'un système initialement désordonné. Il n'y a pas accroissement du désordre.

La situation est plus intéressante lorsqu'il existe un point fixe unique, linéairement stable, et que le retour du système vers cet attracteur, une fois qu'on l'en a écarté, est long et désordonné.

Si le couplage entre les différents points ou sites du système est nul (par exemple en mettant à zéro les coefficients de diffusion dans une équation aux dérivées partielles de type réaction-diffusion), la dynamique du système se réduit à celle d'une collection infinie de systèmes dynamiques indépendants convergeant plus ou moins vite vers le point fixe en fonction des conditions initiales choisies.

En présence d'un couplage entre sites, la situation est radicalement différente car alors le comportement transitoirement chaotique peut être entretenu. Les interactions entre sites voisins sont interprétables en terme de perturbations d'amplitude finie, suffisantes pour maintenir un site loin de l'état de base associé au point fixe stable.

Le caractère chaotique du transitoire assure l'existence d'effets de réalisation, rendant la survie et la propagation de l'état perturbé au sein du système incertaines. Le résultat de la compétition entre ces deux états locaux est imprévisible, et peut conduire à la convergence vers l'état de base en tout point du système (phase laminaire). Dans la phase turbulente, il y a coexistence permanente de domaines identifiables aux différents états de la dynamique locale et séparés par des fronts.

On montre sur la Fig. 3.3, une représentation schématique du régime d'intermittence spatio-temporelle à une dimension.

On peut y vérifier qu'on observe jamais la déstabilisation spontanée d'un domaine laminaire pour donner naissance à un domaine turbulent. Au contraire, les domaines turbulents peuvent disparaître et laisser place à des domaines laminaires plus grands.

La situation est un peu plus complexe dans le cas des expériences en laboratoire car il y a toujours des perturbations, qui même lorsqu'elles sont faibles, sont de temps en temps suffisantes pour déstabiliser l'état laminaire au milieu duquel on voit apparaître un domaine turbulent. On en a un exemple dans le coin supérieur droit de l'image de droite de la Fig. 3.4.

Toute la problématique de l'intermittence spatio-temporelle est de comprendre comment un *régime désordonné permanent* peut émerger grâce aux



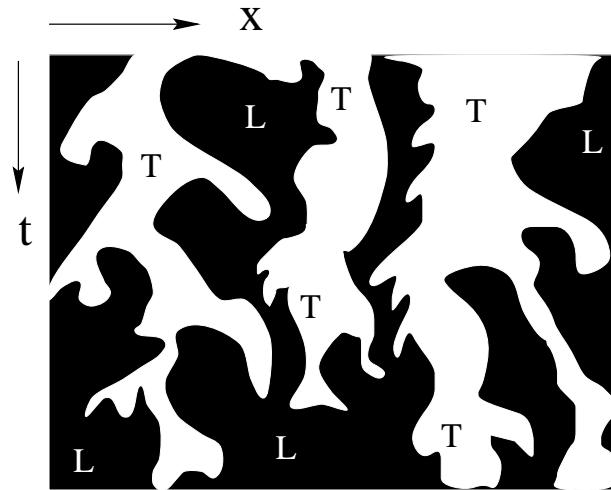


FIG. 3.3 - Représentation schématique du régime d'intermittence spatio-temporelle en dimension  $1 + 1$  (temps et espace). Des domaines identifiables aux deux états de la dynamique locale coexistent et sont séparés par des fronts. L'état perturbé (en blanc) peut se propager par contact ou mourir sur place. Les régions laminaires (en noir) sont linéairement stables et ne peuvent être envahies que par les bords : on n'observe pas la nucléation de domaines turbulents au coeur de domaines laminaires.

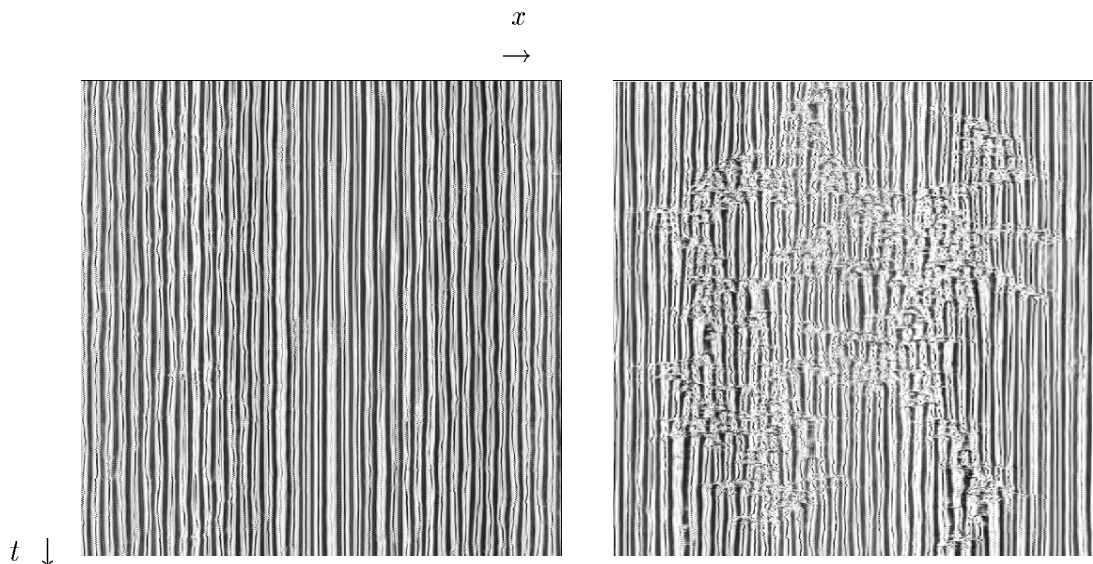


FIG. 3.4 - Acquisition spatio-temporelle sur une expérience de convection de Rayleigh-Bénard annulaire. La Figure de gauche présente le motif régulier formé par les rouleaux. A droite, un exemple typique d'intermittence spatio-temporelle, où coexiste à tous temps un état laminaire (associé au motif régulier des rouleaux) et des domaines turbulents. On peut noter l'apparition de quelques structures propagatives à l'extrême droite des domaines turbulents. Extrait de la référence [25]. On pourra également consulter la référence [14].

couplages alors que la *dynamique locale* n'est que *transitoirement chaotique*.

Les transitions vers la turbulence via intermittence spatio-temporelle dans les systèmes hors d'équilibre ont été depuis plus de 15 ans l'objet de nombreuses études aussi bien théoriques [63, 17, 26, 14] qu'expérimentales [22, 25, 14].

En 1986, Yves Pomeau [84] a conjecturé que les transitions vers la turbulence via intermittence spatio-temporelle pouvait faire l'objet d'un scénario spécifique "universel". Il fit l'hypothèse selon laquelle les "fluctuations chaotiques" étaient à l'origine de la perte de cohérence à temps long des propriétés de propagation de l'état turbulent et devaient pouvoir s'apparenter à un processus stochastique. Le modèle le plus simple incluant un état macroscopique absorbant et la propagation par contamination de l'état turbulent, est la percolation dirigée que nous décrivons en détail dans l'appendice B (Sect. 3.6).

Cette conjecture marque, à cause de l'équivalence qu'elle prédit avec la classe des modèles de percolation dirigée, l'irruption des phénomènes critiques dans l'étude des transitions vers la turbulence, et du concept associé de classe d'universalité. Une classe regroupe l'ensemble des modèles présentant les mêmes propriétés critiques aux seuils des transitions. Ces comportements sont caractérisés par un petit nombre d'exposants (critiques), identiques au sein d'une même classe.

Vérifier la conjecture de Pomeau est important car cela confirmerait qu'il peut y avoir équivalence entre des systèmes stochastiques et déterministes, alors que le passage de l'un à l'autre n'est toujours pas compris théoriquement.

Ensuite, cela nous renseigne sur la nature de la turbulence faible observée dans les systèmes hors d'équilibre, car l'appartenance d'un système à une classe d'universalité donnée permet de connaître les processus dynamiques dominants au seuil et dans son voisinage. Même si le domaine de validité de ce comportement universel peut paraître petit, c'est tout de même là qu'apparaît le régime turbulent, selon un scénario indépendant du détail du système que l'on étudie. L'existence de plusieurs classes, signifie qu'il y a plusieurs scénarios, et donc plusieurs types de régime de turbulence.

H. Chaté et P. Manneville [15, 16, 17] ont entrepris de vérifier cette conjecture. Les premières études sur des équations aux dérivées partielles modèles telles que "Kuramoto-Sivashinsky amortie"[16] se sont révélées difficiles à cause du caractère continu de l'espace (nécessitant une puissance numérique importante), et des problèmes liés à la définition et la localisation des domaines turbulents. Ils ont alors élaboré un modèle minimal d'intermittence spatio-temporelle (MIST par la suite) de type "réseau d'itérations couplées" incluant

*qualitativement* les mécanismes que nous avons décrits précédemment. Ils ont ainsi partiellement levé l'ambiguïté quant à la définition du paramètre d'ordre et réduit considérablement les ressources numériques nécessaires<sup>2</sup>. Il devint alors possible d'étudier de manière réaliste la conjecture de Pomeau.

Les simulations ont rapidement montré que ces systèmes pouvaient présenter des transitions continues ou discontinues (Fig. 3.5), alors que la conjecture de Pomeau supposait indirectement que la transition vers la turbulence se faisait via une transition continue comme c'est le cas pour la percolation dirigée. Lorsque les transitions étaient continues, les simulations ont confirmé qu'une description en terme de phénomènes critiques était adaptée à ces systèmes pourtant strictement déterministes.

Cependant, les mesures directes d'exposants critiques suggéraient le plus souvent que ces systèmes ne rentraient pas dans la classe d'universalité de la percolation dirigée, et que donc la conjecture de Pomeau était fautive, ou en tout cas pas toujours vraie. Nous verrons que même dix ans après les premières simulations du modèle MIST, les mesures d'exposants critiques restent difficiles, et nous chercherons à isoler les processus, ou mécanismes de propagation de l'état turbulent, susceptibles d'expliquer la non-universalité des comportements observés.

Nous allons maintenant décrire en détail ce modèle.

### 3.1.2 Présentation du modèle MIST

Il s'agit d'un modèle de type réseau d'itérations couplées étudié jusqu'à ce jour à une ou deux dimensions d'espace. La généralisation à 3 dimensions ne pose pas de problème si ce n'est qu'elle est très gourmande en ressources numériques. Nous nous limiterons au cas des systèmes unidimensionnels dans la mesure où la problématique que nous venons d'exposer existe déjà à une dimension.

L'espace et le temps sont discrets (nous utiliserons respectivement les indices  $i$  et  $t$ ), alors que la variable locale  $x_i^t$  est continue et bornée. Le couplage se fait entre plus proches voisins et admet une limite diffusif lorsque les pas

---

2. Rappelons que, comme cela a été dit dans l'introduction générale, un réseau d'itérations couplées (discret en temps et en espace, variables locales continues) est un cas intermédiaire entre un système d'équations aux dérivées partielles (qui demande beaucoup de ressources numériques mais dont les comportements observés sont variés), et un automate cellulaire déterministe (dont la simulation est rapide mais le comportement plus difficile à étudier car ne possédant pas de paramètre de contrôle continu).

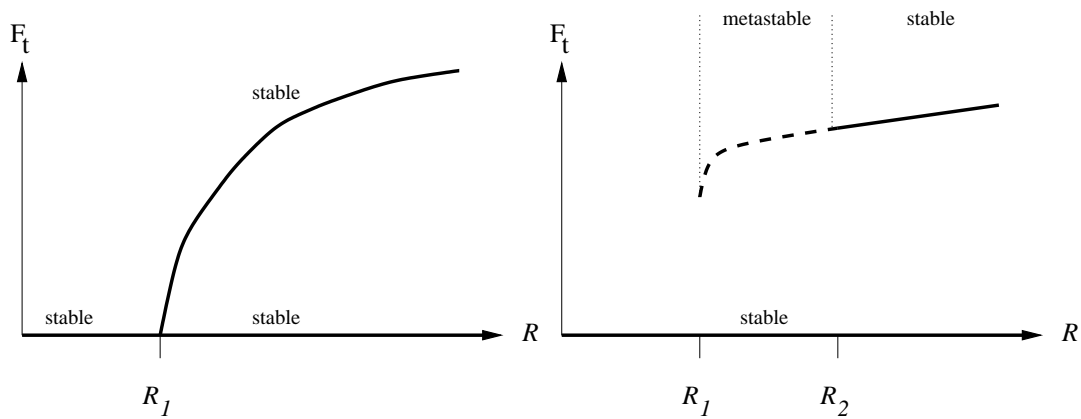


FIG. 3.5 - Représentation schématique d'une transition continue (gauche) puis discontinue (droite) en fonction d'un paramètre de contrôle noté  $R$ , pour un système de taille infinie. Dans le cas continu, la fraction turbulente  $F_t$  tend continûment vers zéro, lorsque l'on s'approche du seuil  $R_1$  par des valeurs supérieures. Ce type de transition continue vers la turbulence, par intermittence spatio-temporelle, a été observé par exemple au delà de l'instabilité de Rayleigh-Bénard [14]. Dans le cas discontinu, le régime turbulent apparaît immédiatement à une distance finie (en terme de paramètre d'ordre). Comme cela a été observé dans l'écoulement de Couette Plan [6, 7], le régime turbulent peut tout d'abord être instable (entre  $R_1$  et  $R_2$ ) et induire des transitoires turbulents. Au delà de  $R_2$ , un régime turbulent permanent peut s'installer.

de temps et d'espace tendent vers zéro. L'état du système au temps  $t + 1$  est donné en fonction de celui au temps  $t$  en effectuant l'itération suivante :

$$x_i^{t+1} = (1 - \epsilon)f(x_i^t) + \frac{\epsilon}{2} [f(x_{i-1}^t) + f(x_{i+1}^t)] \quad . \quad (3.1)$$

La fonction retenue ici, est linéaire par morceaux et dépend d'au maximum<sup>3</sup> trois paramètres  $r$ ,  $k$  et  $x^*$  :

$$\begin{aligned} f(x) &= rx && \text{si } x \in [0, .5] \\ &= r(1 - x) && \text{si } x \in [.5, 1[ \\ &= k(x - x^*) + x^* && \text{si } x \geq 1 \quad . \end{aligned} \quad (3.2)$$

On la représente sur la Fig. 3.6. Cette fonction est au sens strict l'application

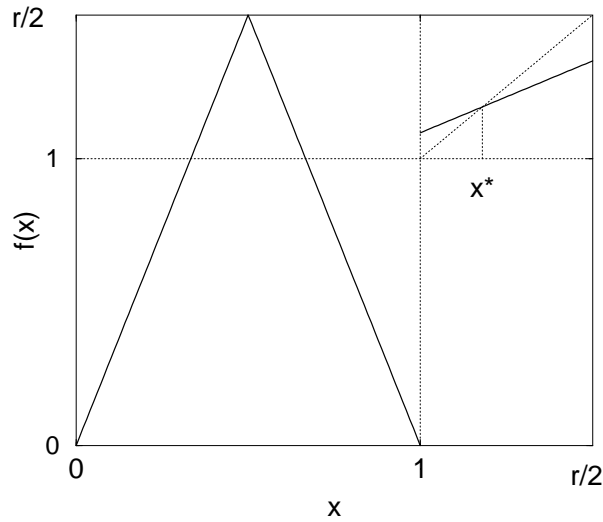


FIG. 3.6 - Application locale  $f$  (Eq. 3.2).

qui contrôle la dynamique locale. Lorsqu'il n'y a pas de couplage entre les sites ( $\epsilon = 0$ ), l'évolution du système est celle d'une collection de systèmes indépendants. Chacun des sous-systèmes évolue sous la forme d'une suite qui à  $x^t$  associe  $x^{t+1}$  tel que  $x^{t+1} = f(x^t)$ .

Elle se compose d'une partie en accent circonflexe telle que les trajectoires soient en tout point divergente dès que  $r$  est plus grand que 1. Cela signifie que

---

<sup>3</sup>. Noter que la dépendance en  $x^*$  disparaît pour  $k = 1$ , laissant ainsi  $r$  comme seul paramètre libre.

deux conditions initialement proches, s'éloignent exponentiellement vite l'une de l'autre avec un temps caractéristique  $\lambda$  dépendant de  $r$ . Si l'on note  $y^0$  et  $z^0$  ces deux conditions initiales, avec  $\delta^0 = y^0 - z^0$  petit, l'évolution de la distance entre les deux solutions tant qu'elles restent comprises dans l'intervalle  $[0, 1[$ , est donnée par

$$|\delta^t| = \exp(t \ln r) |\delta^0| \quad (3.3)$$

d'où  $\lambda = 1/\ln(r)$ . Une valeur de  $\lambda$  positive ( $\lambda > 1$ ) implique la croissance exponentielle de  $\delta^t$  à temps court.

Lorsque  $r < 2$ , il existe un sous-intervalle de  $[0, 1[$  laissé invariant par l'application  $f$ . La sensibilité aux conditions initiales, qui découle de la divergence locale des trajectoires, assure la convergence de toutes les conditions initiales comprises dans l'intervalle  $[0, 1[$  vers un attracteur chaotique. On a représenté sur la Fig.3.7 (haut), une série temporelle typique de ce cas.

Lorsque  $r > 2$ , la situation est significativement différente car il n'existe plus d'intervalle, inclus dans  $[0, 1]$ , laissé invariant par l'application  $f$ . Une condition initiale comprise dans l'intervalle  $[0, 1]$  tombe en un temps fini dans l'intervalle  $[1, r/2]$ . La durée moyenne de ce transitoire est donnée par  $r/(r-2)$  et diverge lorsqu'on s'approche de 2 (voir Fig. 3.7 (milieu et bas)).

Durant ce transitoire, l'application  $f$  reste divergente. Il y a toujours sensibilité aux conditions initiales, et on parle alors de transitoire chaotique.

Dès que  $x$  est compris entre 1 et  $r/2$  le système (local) est bloqué dans un état marginalement stable si  $k = 1$ , ou converge vers l'unique point fixe stable  $x = x^*$  si  $|k| < 1$ . On exclut a priori les cas  $|k| > 1$ , pour lesquels la variable locale diverge exponentiellement vite.

On constate que pour le modèle MIST, il est facile de faire une distinction entre les différents états de la dynamique locale. Nous dirons qu'un site est dans l'état turbulent correspondant au transitoire chaotique si  $x < 1$ , et dans l'état laminaire si  $x \geq 1$ . Par abus de langage, on parlera de sites turbulents et laminaires.

Si tous les sites sont tels que les  $x_i$  soient compris dans l'intervalle  $[1, r/2]$  au temps  $t$ , il en est de même au temps  $t + 1$  à cause du caractère diffusif du couplage (indépendamment de la valeur de  $\epsilon$ ). Sous l'effet de la diffusion et/ou de la dynamique locale, le système converge vers un état uniforme.

Lorsque  $|k| < 1$ , le seul attracteur uniforme est celui tel que  $x = x^*$  en tous points du système, alors que pour  $k = 1$  toute solution laminaire uniforme est un état stationnaire. Ces solutions uniformes sont des attracteurs linéairement stables du système macroscopique, dont le nombre de degrés de

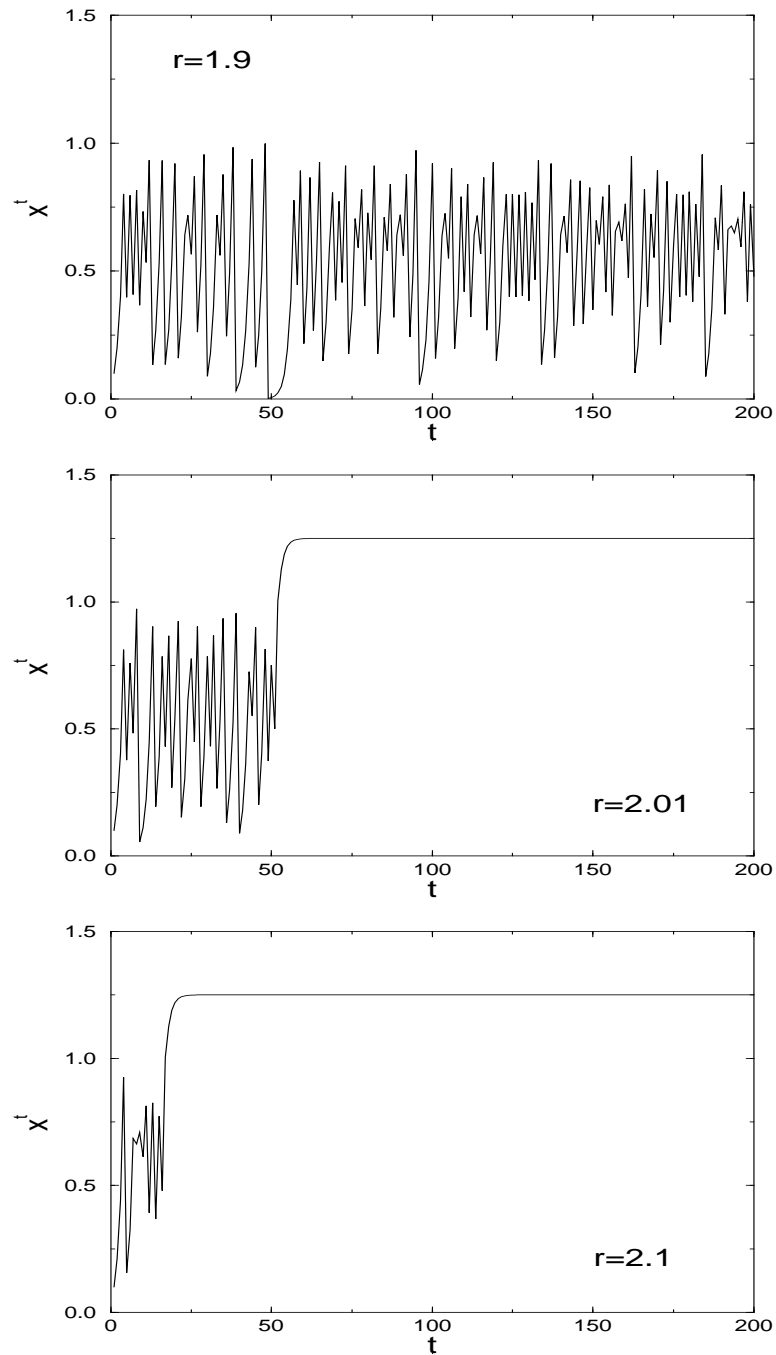


FIG. 3.7 - Evolution caractéristique de la suite  $x^{t+1} = f(x^t)$  pour  $x^0 \in [0, 1[$ ,  $k = 0.5$ ,  $x^* = 1.25$  et  $r = 1.9, 2.01$  et  $2.1$  de haut en bas. Dans ces trois cas,  $r > 1$  et le caractère divergent de l'application circonflexe (identique à  $f$  tant que  $x \in [0, 1]$ ) assure le comportement chaotique de la solution. Pour  $r > 2$  celui-ci n'est que transitoire et on fini par observer la convergence vers l'unique attracteur stable du système,  $x = x^*$  pour les valeurs considérées. La comparaison entre les évolutions pour  $r = 2.01$  et  $r = 2.1$  illustre la divergence lorsque  $r$  tend vers 2 du temps moyen passé dans le transitoire chaotique turbulent à partir d'une condition initiale quelconque dans l'intervalle  $[0, 1]$ .

liberté effectifs est faible<sup>4</sup>. On dit qu'ils sont absorbants pour accentuer le fait qu'une perturbation d'amplitude finie est nécessaire pour s'éloigner durablement de ces états. Lorsque ces états absorbants sont multiples, on parle de dégénérescence de l'état absorbant.

De manière synthétique, on peut dire que les états absorbants sont les attracteurs vers lesquels les états de la phase laminaire convergent.

La dynamique locale est transitoirement chaotique, mais peut être entretenue et se propager via le couplage aux plus proches voisins, assimilable à une perturbation d'amplitude finie. Une manière simple de caractériser l'état du système est de vérifier qu'il existe toujours des sites dans l'état turbulent ( $x < 1$ ). Si ce n'est pas le cas, le système est dans la phase laminaire et donc converge vers un des états absorbants.

Cela nous permet de choisir la densité de sites turbulents, ou fraction turbulente, comme paramètre d'ordre "minimal", que l'on peut utiliser pour caractériser la transition entre la phase turbulente et la phase laminaire lorsque l'on varie les paramètres de contrôle du système.

Il n'est pas question de faire ici une description détaillée de l'ensemble des comportements observables dans l'espace des paramètres (à quatre dimensions...), et nous allons nous concentrer pour l'instant sur le cas  $k = 1$ , mais reviendrons ponctuellement aux cas  $|k| < 1$ .

Nous nous intéressons à l'apparition de régimes turbulents permanents, c'est à dire des attracteurs de la dynamique globale. Nous montrons sur la Fig. 3.8, deux diagrammes spatio-temporels<sup>5</sup>, où l'on peut voir la coexistence des domaines laminaires et turbulents, et leurs évolutions désordonnées en temps et en espace.

Près du seuil, les fluctuations des propriétés de propagation de l'état turbulent font que le régime turbulent dans un système de taille finie ne peut être que transitoire. Cependant, on peut montrer que pour certaines valeurs de paramètres, le temps de vie de la phase turbulente (le nombre moyen d'itérations pendant lesquelles le système est dans un état turbulent) diverge exponentiellement vite avec la taille du système. Ceci implique que le régime d'intermittence spatio-temporelle n'est réellement stable que dans la limite des systèmes de taille infinie. Mais dans la pratique (expérimentalement et numériquement), dès que le système contient quelques centaines de sites on est incapable d'ob-

---

4. On a besoin d'une seule variable pour caractériser un état uniforme.

5. Image bidimensionnelle composée des itérations successives d'un réseau à un dimension, où l'état de chaque site est codé par la couleur.



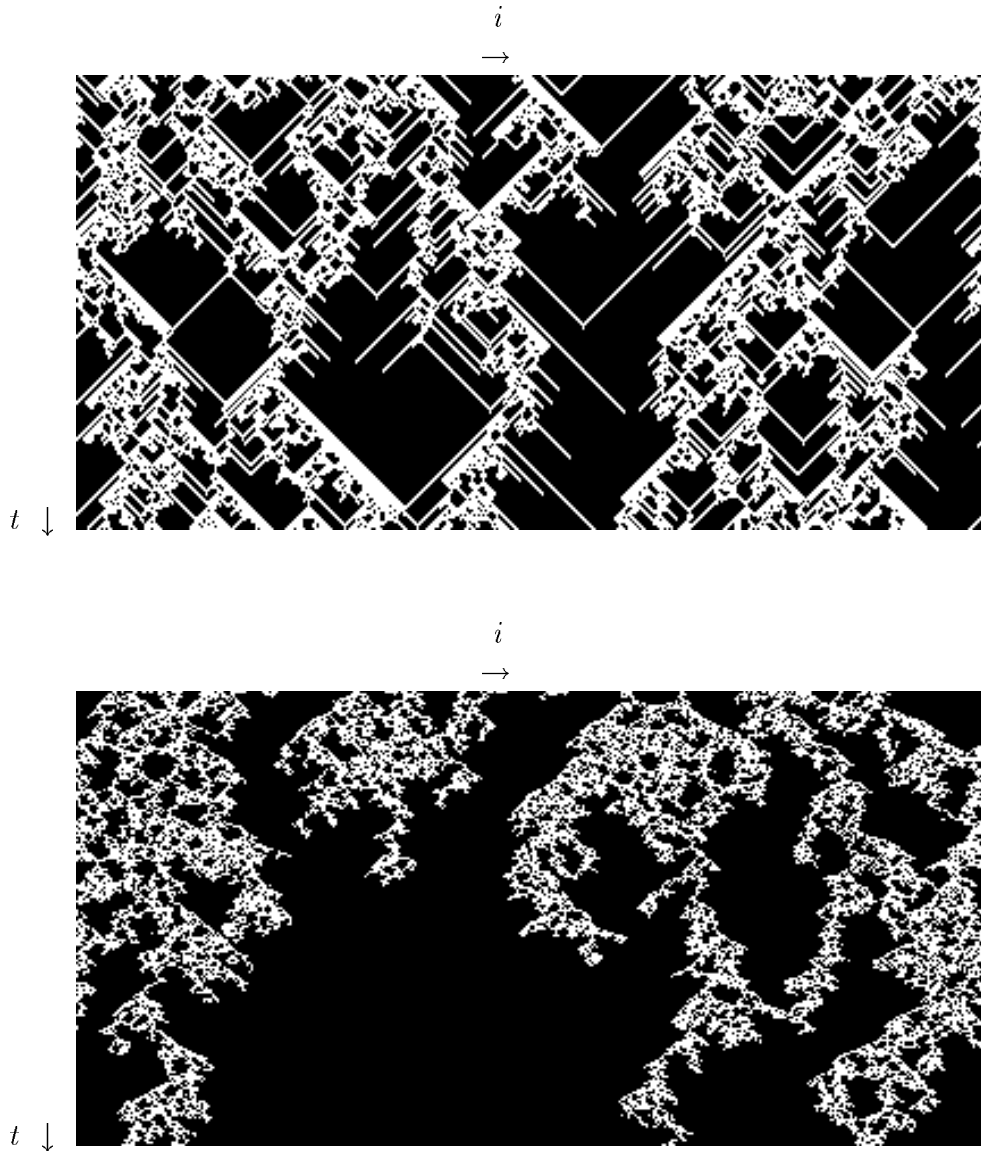


FIG. 3.8 - Diagrammes spatio-temporels au voisinage de seuils pour  $r = 3$ ,  $\epsilon = 0.36$  (haut) et  $r = 2.1$ ,  $\epsilon = 0.005$  (bas). Les sites en blanc sont turbulents ( $x < 1$ ) alors que ceux en noir sont laminaires ( $x > 1$ ). Le temps croît de haut en bas. Les systèmes sont constitués de 800 sites. On représente respectivement 400 (haut) et 4000 (bas) itérations. On voit clairement l'émergence de structures propagatives (diagonales blanches) dans le cas  $r = 3$ , alors que le cas  $r = 2.1$  est plus proche du cas purement stochastique, où il n'y a pas de trace du déterminisme sous-jacent. On pourra comparer ces diagrammes à ceux de la percolation dirigée, présentés dans la Fig. 3.57.

server la mort systématique de la phase turbulente, le temps de vie étant déjà astronomique.

A cause de cet effet de taille finie, toutes les grandeurs macroscopiques sont définies dans la limite des systèmes de taille infinie à temps infini. Par analogie avec la thermodynamique des systèmes à l'équilibre qui apparaît comme la limite des systèmes de volume infini dans le cadre de la mécanique statistique, on parle parfois de limite thermodynamique. Il ne faut pas que cette terminologie soit source de confusion, et nous avons essayé dans la mesure du possible de limiter l'emploi du vocabulaire abusif même si celui-ci est couramment utilisé dans la littérature spécialisée, et est donc nécessaire à la compréhension de celle-ci.

### 3.1.3 Résultats antérieurs et préliminaires

Nous discutons dans cette section les principaux résultats sur le modèle MIST qui a fait l'objet d'une quinzaine de publications depuis l'article fondateur [17] où il a été présenté pour la première fois. Nous aborderons quatre aspects distincts : le domaine d'existence et la nature des transitions dans l'espace des paramètres, la mise en évidence de propriétés critiques, les différentes mesures d'exposants critiques, puis finalement nous reprendrons l'argumentation de P. Grassberger et T. Schreiber [50] qui reste le point de départ de ce travail.

On représente, en fonction de  $r$  et  $\epsilon$ , sur la Fig. 3.9 le diagramme de phases que nous avons obtenu à  $k = 1$ , où apparaît le domaine d'existence du régime d'intermittence spatio-temporelle caractérisé par la coexistence à tous temps de domaines laminaires et turbulents. La méthode de détermination numérique est décrite dans la légende de cette figure.

Il faut garder à l'esprit que le régime permanent d'intermittence spatio-temporelle coexiste dans l'espace des phases avec les états absorbants. La courbe séparant les deux domaines marque l'estimation de la position des points de transition (aussi appelés seuils de transition) entre les valeurs de paramètres où il y a coexistence et celles où les états absorbants sont les seuls attracteurs.

La Fig. 3.10 montre le comportement de la fraction turbulente le long de la ligne  $r = 3$  en variant  $\epsilon$ . C'est une fonction continue qui tend vers 0 lorsqu'on s'approche des deux seuils ( $\epsilon_{c1} \simeq 0.35986$  et  $\epsilon_{c2} \simeq 0.908$ ). Cela signifie que les transitions le long de cette coupe sont continues. Ce résultat est plus général et est valable pour tous les points de transition que nous avons

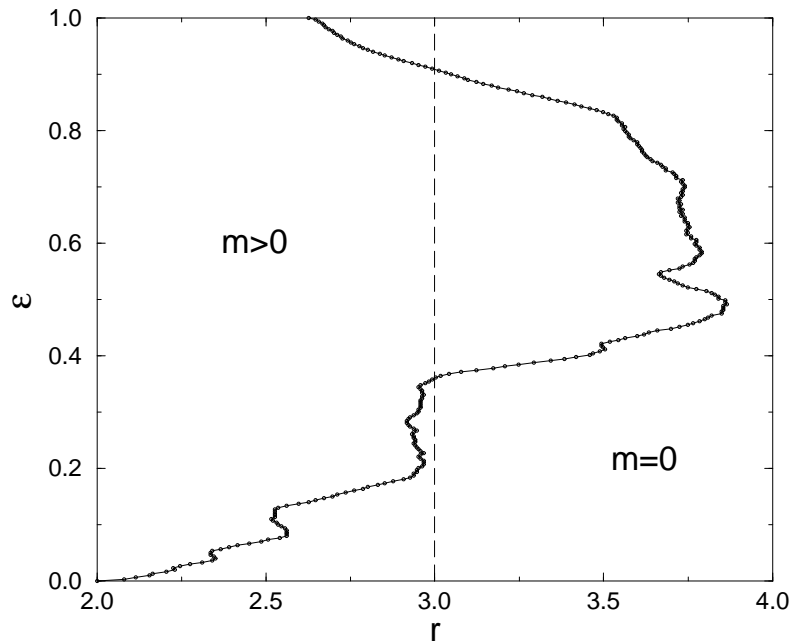


FIG. 3.9 - Diagramme des phases montrant le domaine d'existence du régime d'intermittence spatio-temporelle. On considère que le régime turbulent est permanent, en un point donné de l'espace des paramètres, si après 10000 itérations d'un réseau de  $5 \cdot 10^3$  sites, en partant d'une condition initiale complètement turbulente, la fraction turbulente n'est jamais descendue sous la barre des 5%. Pour améliorer l'estimation en limitant les effets de transitoire, on a conservé les états à fraction turbulente non nulle en augmentant légèrement  $r$  pour deux points voisins. L'erreur relative sur la position des seuils est de l'ordre de 1 pour cent. Toutes les structures observées à cette échelle sont donc réelles. La coupe présentée dans la Fig. 3.10 est symbolisée par un trait en tiret.

étudiées à  $k = 1$ , sans que nous ayons d'argument pour exclure l'existence de transitions discontinues. Ce n'est d'ailleurs pas systématique puisque les transitions observées pour  $k < 1$  sont le plus souvent discontinues [18].

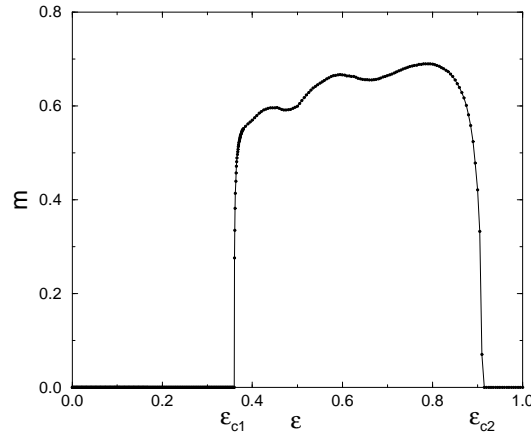


FIG. 3.10 - *Aimantation (densité moyenne de sites turbulent  $x < 1$ , pour  $r = 3$  en variant  $\epsilon$ .  $L = 5 \cdot 10^3$ , la moyenne est faite sur  $10^5$  itérations après un transitoire du même temps, à partir d'une condition initiale où tous les sites sont turbulents.*

Nous intéressant exclusivement aux cas des transitions continues, nous allons étudier les propriétés critiques au voisinage des seuils. Comme nous l'avons déjà mentionné et montré sur la Fig. 3.8, les régimes d'intermittence spatio-temporelle sont caractérisés par la coexistence de domaines turbulents très désordonnés et de domaines laminaires relaxant localement vers un des états absorbants. La taille moyenne des zones laminaires diverge lorsque l'on s'approche du seuil par des valeurs supérieures pour  $\epsilon_{c1}$  et inférieures pour  $\epsilon_{c2}$ .

Les histogrammes des tailles des domaines laminaires au seuil (voir Fig. 3.11) montrent par ailleurs, que celles-ci sont distribuées algébriquement suggérant l'existence d'une structure multi-échelle auto-similaire. Au seuil de la transition, la fraction turbulente tend vers 0 pour toute condition initiale dans la phase turbulente. On dit que l'ensemble des sites turbulents est de mesure nulle. Cela ne signifie pas qu'ils sont négligeables, bien au contraire, puisqu'ils sont à l'origine du découpage des zones laminaires qu'ils délimitent.

Pour décrire les objets de ce type, B. Mandelbrot a introduit la notion de fractal. La littérature sur le sujet est abondante et nous nous contenterons

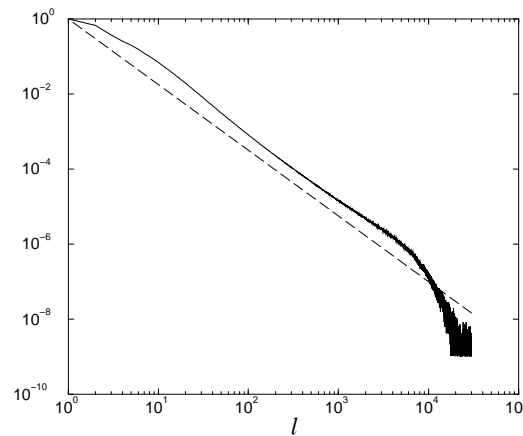


FIG. 3.11 - *Histogramme des tailles des domaines laminaires  $l$  à temps long au seuil de la transition à  $r = 3$  et  $\epsilon = 0.35986 \simeq \epsilon_c$ . La coupure à grande taille est un effet de temps et de taille finis. On rajoute une loi de puissance en  $l^{-1.75}$  pour mettre en évidence le comportement algébrique.*

d'insister sur le caractère auto-similaire lié à la notion de fractal. Nous laissons le lecteur parcourir la littérature spécifique, par exemple [55], s'il souhaite approfondir la question.

Cette propriété est typique de ce que l'on voit dans les phénomènes critiques au seuil des transitions, où la longueur de corrélation diverge, reflétant ainsi l'organisation complexe (multi-échelle) de la structure spatiale du système. Une autre caractéristique importante est que la dynamique du système est en partie contrôlée par l'existence de fluctuations au sein du système : on ne peut se contenter d'une approche du type champ moyen, et il faut faire appel aux techniques du groupe de renormalisation pour étudier les propriétés statistiques de ces systèmes au voisinage des seuils. Là encore la littérature est abondante [103, 4] et les détails de ces techniques ne rentrent pas dans le cadre de ce travail.

Comme nous l'avons déjà dit, les comportements critiques se manifestent par l'émergence de lois de puissance dans les dépendances des principales grandeurs macroscopiques en fonction du temps ou de la distance au seuil. Les exposants de ces lois de puissance sont identiques au sein d'une même classe d'universalité. Dès lors, une manière simple de montrer qu'un système n'est pas dans la classe d'universalité de la percolation dirigée consiste à mesurer

certaines de ces exposants et à les comparer à ceux de la classe attendue. Les mesures portent généralement sur les trois exposants<sup>6</sup>  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $z$ . On rappelle dans le tableau 3.1 les définitions de ces trois exposants. Les méthodes d'estimation sont, comme nous l'avons déjà souligné, délicates, et nous consacrons l'appendice A (Sect. 3.5) à cette question qui reste assez technique.

On porte dans le tableau 3.2 les mesures antérieures d'exposants pour le modèle MIST à  $k = 1$ . Ces colonnes de chiffres sont surtout intéressantes car elles montrent que depuis dix ans, la mesure directe des exposants critiques n'a pas apporté de réponses très nettes à la question de l'appartenance à la classe d'universalité de la percolation dirigée. Dans la plupart des cas, les mesures de  $\alpha$ , lorsqu'elles sont fiables, incluent ou excluent de peu la valeur de la percolation dirigée (beaucoup de mesures se situent autour de 0.170 avec un erreur estimée de l'ordre de  $\pm 0.010$ ). Les seules exceptions sont les mesures récentes autour de  $r = 2.4$  et  $r = 2.9$ . Cela suggère que l'on pourrait être dans un cas où les exposants sont en général ceux de la percolation dirigée, sauf en certains points ou certains domaines de la ligne de transition où les valeurs seraient significativement différentes.

C'est dans ce sens que O. Moriyama et M. Matsushita [82] ont conduit la première étude systématique sur les variations des exposants le long de la ligne de transition. Nous verrons que le découpage qu'ils ont pris (en faisant varier  $r$  par pas de 0.1 entre  $r = 2$  et  $r = 3$ ), est trop grossier pour rendre compte de la variété des mécanismes en jeu. On peut s'en convaincre en regardant l'estimation que nous avons faite de la position des points de transition (Fig. 3.9). Elle montre l'organisation en paliers successifs de cette ligne. Il aurait probablement été plus intéressant de faire cette recherche sur un de ces paliers où les propriétés de propagation de l'état turbulent varient peu. Nous reviendrons sur ce point dans les sections suivantes.

L'article de référence reste celui de P. Grassberger et T. Schreiber [50]. C'est en effet un des seuls, avec ceux de H. Chaté et P. Manneville [17, 18], où sont étudiées quantitativement les propriétés de propagation de l'état turbulent au sein des zones laminaires, en cherchant à comprendre en quoi le caractère déterministe de la dynamique peut influencer l'appartenance ou non à la classe d'universalité de la percolation dirigée. Nous en reprenons ici l'argumentation principale.

La conjecture de Pomeau se fonde sur la réduction de la sensibilité aux conditions initiales locales à un bruit. Or le diagramme spatio-temporel à  $r = 3$

---

6. On sait que dans le cas dans la classe d'universalité de la percolation dirigée, il n'y a que trois exposants indépendants [98].

exposant	définition
$\alpha$	<p>Caractérise la décroissance algébrique du paramètre d'ordre <math>m</math> au seuil de la transition en partant d'une condition initiale décorrélée dans la phase turbulente.</p> $\lim_{L \rightarrow \infty} m(\epsilon_c, r_c, L, t) \propto t^{-\alpha} \quad t \gg t_0$
$\beta$	<p>Caractérise la variation en loi de puissance du paramètre d'ordre lorsque l'on s'approche du seuil par des valeurs supérieures.</p> $\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{L \rightarrow \infty} m(\epsilon_c + \delta\epsilon, r_c + \delta r, L, t) \propto \delta^\beta$
$z$	<p>Caractérise la divergence algébrique du temps de vie moyen <math>\tau</math> de la phase turbulente au seuil de la transition lorsque l'on augmente la taille du système.</p> $\tau(\epsilon_c, r_c, L) = \langle \tau_s(\epsilon_c, r_c, L, s) \rangle_s \propto L^z$
$\nu_\perp$	<p>Caractérise la divergence de la longueur de corrélation temporelle <math>\zeta_\perp</math> dans la phase turbulente lorsque l'on s'approche du seuil.</p> $\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{L \rightarrow \infty} \zeta_\perp(\epsilon_c + \delta\epsilon, r_c + \delta r, L, t) \propto \delta^{-\nu_\perp}$
$\nu_\parallel$	<p>Caractérise la divergence de la longueur de corrélation spatiale <math>\zeta_\parallel</math> dans la phase turbulente lorsque l'on s'approche du seuil.</p> $\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{L \rightarrow \infty} \zeta_\parallel(\epsilon_c + \delta\epsilon, r_c + \delta r, L, t) \propto \delta^{-\nu_\parallel}$

TAB. 3.1 - Définition des principaux exposants. Voir appendice A (Sect. 3.5) pour le protocole de mesure et les détails ne pouvant apparaître dans une représentation qui se veut synthétique. Seul trois de ces exposants sont indépendants. On a par exemple  $\alpha = \beta/\nu_\parallel$  et  $z = \nu_\parallel/\nu_\perp$ .

référence	$\epsilon_c$	$r_c$	$\alpha$	$\beta$	$z$
[29] <sup>a</sup>	-	-	0.1597(5)	0.277(2)	1.580(1)
[17] <sup>b</sup>	0.35998(-)	3	-	0.250(5)	-
[50] <sup>c</sup>	0.35985(4)	3	0.160(-)	-	-
[58] <sup>d</sup>	0.1	2.539(1)	0.20(1)	0.30(2)	1.44(2)
	0.3598(5)	3	0.18(1)	0.24(2)	1.42(2)
	0.7	3.735(5)	0.17(1)	0.24(2)	1.70(2)
	0.90083(5)	3	0.16(1)	0.22(2)	1.65(2)
	1	2.628(5)	0.16(1)	0.22(2)	1.60(2)
[82] <sup>e</sup>	0.00468(-)	2.1	0.172(4)	-	-
	0.016035(-)	2.2	0.174(6)	-	-
	0.032165(-)	2.3	0.192(5)	-	-
	0.06085(-)	2.4	0.243(6)	-	-
	0.07228(-)	2.5	0.187(6)	-	-
	0.13695(-)	2.6	0.161(6)	-	-
	0.15115(-)	2.7	0.174(5)	-	-
	0.16605(-)	2.8	0.168(6)	-	-
	0.17940(-)	2.9	0.138(5)	-	-
0.35985(-)	3	0.168(7)	-	-	
[89] <sup>f</sup>	0.0195(2)	2.2	0.16(1)	0.28(1)	1.58(2)
	0.5096(2)	2.6	0.16(1)	0.28(1)	1.59(2)
	0.5870(3)	3	0.15(2)	0.28(1)	1.60(3)

TAB. 3.2 - *Résumé des différentes mesures d'exposants effectuées sur le modèle MIST pour  $k = 1$ . Le chiffre entre parenthèses est l'incertitude sur la dernière décimale donnée.*

*a* : Ces mesures restent les estimations les plus précises des exposants critiques de la percolation dirigée, bien que déjà vieilles de 10 ans.

*b* : C'est le premier article sur le modèle MIST. Les mesures d'exposants concernent essentiellement les statistiques des tailles des zones laminaires et n'apparaissent pas dans ce tableau.

*c* : Les auteurs concluent à l'appartenance à la classe d'universalité de la percolation dirigée pour le cas  $r = 3$ . C'est la première et unique fois que les propriétés des structures propagatives et des zones laminaires sont étudiées.

*d* : Les auteurs utilisent essentiellement des estimations des exposants et des seuils par étude des effets de taille finie. Cela a pour effet de générer une incertitude importante sur les mesures qui sont globalement peu concluantes.

*e* : C'est la première étude systématique de la variation des exposants le long de la ligne de transitions. Les mesures entre  $r = 2.5$  et 3 sont fiables alors que celles pour les petites valeurs de  $r$  sont entachées d'une erreur importante (nos mesures à 2.1 excluent les leurs).

*f* : Ces mesures correspondent à une version asynchrone du modèle MIST. Toutes les mesures sont dans ce cas compatibles avec les valeurs de la percolation dirigée.



(Fig. 3.8) montre que les zones laminaires sont traversées par des structures propagatives composées de sites turbulents. Le raisonnement de H. Chaté et P. Manneville [18] consiste à dire que ces structures véhiculent l'état turbulent de manière systématique (on dira balistique dans la mesure où elles se propagent avec une vitesse bien définie) et que cela n'a plus rien à voir avec les modes dits diffusifs (à cause du caractère désordonné de la propagation qui reste soumise à un effet de réalisation). Il n'y a plus de perte de cohérence dans les propriétés de propagation et on n'a plus de raison d'être dans la classe d'universalité de la percolation dirigée<sup>7</sup>.

Comme l'ont souligné par la suite P. Grassberger et T. Schreiber, cet argument doit être nuancé lorsque ces structures ont une durée de vie finie. La durée de vie n'est rien d'autre que la longueur du segment que l'on observe dans un diagramme spatio-temporel et dont les extrémités marquent l'apparition et la mort de la structure en question. Si ces structures sont de durée de vie finie, cela signifie que la propagation de l'état turbulent sur de très grandes distances est, comme pour la percolation dirigée, désordonnée. Naïvement, on peut dire que plus la distance à parcourir est grande plus il faut de petits segments, et que chaque "pas" est conditionné par la probabilité de nucléation d'une structure propagative.

Lorsque l'on mesure l'exposant  $\alpha$  (au seuil d'une transition), on utilise une condition initiale où tous les sites sont turbulents. La décroissance de la fraction turbulente (ou aimantation) en loi de puissance s'accompagne de la croissance de la taille moyenne des zones laminaires.

Tant que les tailles des zones laminaires sont inférieures ou de l'ordre du temps de vie des structures propagatives, la dynamique du système ne peut pas être influencée par le temps de vie fini de celles-ci, et tout se passe comme si leur temps de vie était infini, et donc la propagation de l'état turbulent systématique. Il n'y a pas de raison pour qu'on mesure l'exposant de la percolation dirigée. Par contre, il n'est pas à exclure que cela corresponde à un autre régime d'échelle<sup>8</sup>. On peut alors transitoirement mesurer un exposant différent de celui de la percolation dirigée. Mais finalement, les zones laminaires deviennent nettement plus grandes que la longueur associée à ce temps de vie, les effets

---

7. Rappelons que la "parity conserving class" est la seule exception notable dans les systèmes probabilistes avec un état absorbant et des interactions à courtes portées, et que sa singularité vient d'une modification des propriétés de propagation de l'état turbulent (voir appendice C, Sect. 3.7).

8. Par régime d'échelle, on entend comportement statique ou dynamique représentatif de l'émergence de propriétés critiques au seuil et dans son voisinage. Cela fait par exemple référence au comportement algébrique de la densité de sites turbulents au seuil de la transition.

de réalisation sont dominants et on retrouve l'exposant caractéristique de la classe d'universalité de la percolation dirigée. La transition entre deux régimes d'échelle distincts s'appelle un "cross-over".

P. Grassberger et T. Schreiber ont alors entrepris de faire la statistique des temps de vie des structures propagatives (en cumulant simplement les longueurs des segments dans la direction fixée par la vitesse des structures dans un diagramme spatio-temporel) et ont constaté que le temps de vie moyen de ces structures était fini. Dès lors, ils ont réinterprété les mesures de  $\alpha$  (qui à l'époque étaient toutes proches de la valeur de la percolation dirigée) comme des mesures rendues approximatives à cause du transitoire induit par l'existence des structures propagatives. Cette hypothèse était bien évidemment confortée par le fait que ces valeurs étaient difficilement discernables. Ils conclurent donc à l'appartenance à la classe d'universalité de la percolation dirigée.

Nous verrons les limites de ces résultats dans les sections suivantes dont nous allons présenter l'organisation.

### 3.1.4 Problématique

La vérification de la conjecture de Pomeau sur l'existence d'un scénario spécifique, reste un élément clé de la compréhension des mécanismes de transition vers la turbulence via intermittence spatio-temporelle.

Dans ce cadre, le modèle MIST présente les qualités nécessaires à une étude quantitative des propriétés de propagation de l'état turbulent et à celle associée de l'universalité des comportements au voisinage des points transitions (identification claire de l'état turbulent, mise en oeuvre numérique simple permettant d'approcher la limite des tailles et des temps infinis, existence générique de transitions continues, ...).

La littérature des dix dernières années sur ce modèle n'apporte pas de réponse définitive quand à l'appartenance ou non des transitions observées à la classe d'universalité de la percolation dirigée. L'argumentation la plus courante consiste à dire que les structures propagatives que l'on observe modifient significativement la propagation de l'état turbulent en la rendant systématique. P. Grassberger et T. Schreiber supposaient implicitement que ces structures étaient linéairement instables et ne pouvaient durablement écarter le système de la classe d'universalité de la percolation dirigée.

Nous avons étudié analytiquement ces structures propagatives, et sommes arrivés à la conclusion que, même si l'argumentation de P. Grassberger et

T. Schreiber reste valable, elle ne s'applique pas aux cas qu'ils ont regardés puisque leurs hypothèses ne sont pas vérifiées.

Nous verrons par ailleurs que toutes les structures propagatives n'influencent pas la propagation de l'état turbulent de la même manière. Cela mettra en évidence l'ambiguïté liée à la définition du paramètre d'ordre. La question est de savoir si les sites turbulents constituant les structures propagatives (notamment celles décrites par P. Grassberger et T. Schreiber) doivent être inclus ou non dans la densité de sites turbulents.

Nous vérifierons qu'il n'y pas de problème de ce point de vue pour le modèle MIST à  $k = 1$ . Puis nous donnerons les résultats des dernières mesures qui bénéficient d'une plus grande précision en raison de l'augmentation de la puissance de calcul des ordinateurs, mais également grâce à la mise au point et l'utilisation d'un protocole cohérent de mesure des exposants (voir appendice A (Sect. 3.5)).

La mesure d'exposants ne sera jamais suffisante en soit car on ne peut qu'approcher la limite des temps et des tailles infinis. On ne peut donc jamais exclure l'existence d'un "cross-over", au delà duquel la valeur de  $\alpha$  change. Il apparaît alors plus significatif d'étudier les mécanismes susceptibles de modifier les propriétés de propagation de l'état turbulent, puis de vérifier, comme cela a été fait pour la "parity conserving class" dans l'appendice C (Sect. 3.7), que ces mécanismes ne sont pas dépendants d'un temps ou d'une longueur caractéristique, susceptible d'induire un "cross-over" à temps long.

Nous verrons que, dans ce contexte, la caractéristique la plus importante du modèle MIST, qui est absente des modèles probabilistes (à l'exception de la "parity conserving class") et avait été négligée jusqu'à présent<sup>9</sup>, est la dégénérescence de l'état absorbant. Nous montrerons comment les structures propagatives modifient les domaines laminaires dans lesquelles elles se propagent, et peuvent durablement influencer les propriétés de propagation de l'état turbulent (voir Fig. 3.12). Nous concluons finalement que le cas  $r = 3$  n'est pas dans la classe d'universalité de la percolation dirigée, même si les mesures d'exposants critiques restent insatisfaisantes.

Il faut préciser que nous avons continuellement fait référence à des modèles probabilistes dérivés du modèle de la percolation dirigée, et dans lesquels nous ajoutons les mécanismes de propagations que nous avons identifiés dans le

---

9. Même si ce point a déjà été présenté de façon très générale comme pouvant être à l'origine d'un comportement critique distinct de celui de la classe d'universalité de la percolation dirigée.

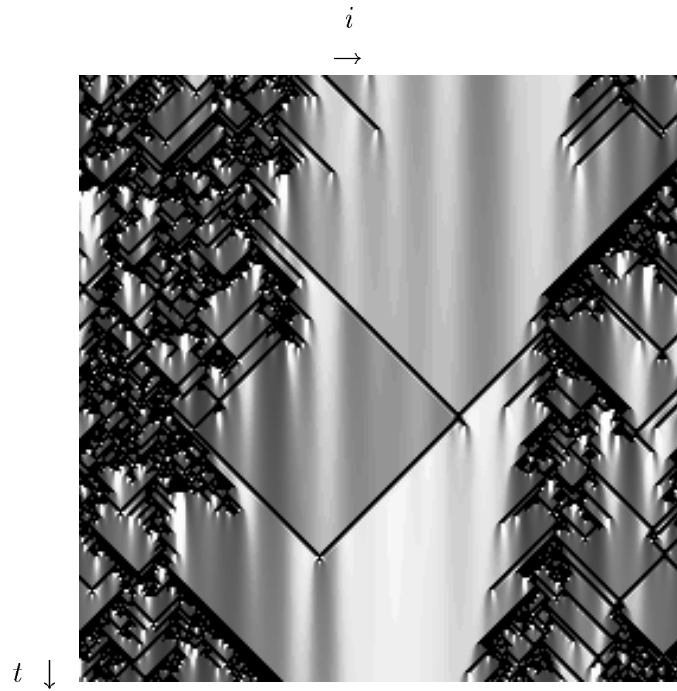


FIG. 3.12 - *Diagramme spatio-temporelle pour  $r = 3$  et  $\epsilon = 0.35986$ , 256 sites et itérations, au voisinage du seuil. Le choix d'une palette de couleurs adaptée (noir si  $x < 1$ , dégradé de gris pour  $x$  compris entre 1 (gris foncé) et 1.5 (blanc), nous permet de mettre en évidence les modulations et leurs amortissements au sein des zones laminaires. Notez l'apparition d'un soliton qui traverse la presque totalité de la plus grande zone laminaire, en la modifiant significativement (couleur beaucoup plus foncée devant que derrière le soliton). Le temps croît de haut en bas.*

modèle MIST. Cette approche a été déterminante pour faire le tri entre les mécanismes dominants et ceux qui ne l'étaient pas, tout en confirmant à chaque étape la similitude des comportements observés entre les modèles turbulents (déterministes) et les systèmes stochastiques.

Bien qu'il puisse paraître annexe, ce travail de modélisation physique constitue la spécificité de notre étude, le reste relevant simplement de l'amélioration de techniques numériques.

## 3.2 Structures propagatives, paramètres d'ordre et exposants critiques

La section d'introduction a montré que le mode de propagation de l'état turbulent était un des points à comprendre lorsque l'on traite de l'appartenance des transitions continues vers un régime d'intermittence spatio-temporelle à une classe d'universalité de la percolation dirigée.

Nous allons dans un premier temps dériver certains résultats analytiques relatifs aux conditions d'existence et de stabilité des structures propagatives (Sect. 3.2.1).

Puis nous verrons (Sect. 3.2.2) que ces résultats nous obligent à réviser la théorie des "gaz de solitons", présentée par P. Grassberger et T. Schreiber [50], dans la mesure où elle est basée sur des objets trop "idéalisés" (les solitons) pour réellement influencer les propriétés critiques. De plus, nous montrerons que les sites composants ces structures ne doivent pas être comptabilisés dans le paramètre d'ordre si elles ne sont pas des vecteurs efficaces de l'état turbulent.

Nous serons alors amené (Sect. 3.2.3) à définir des paramètres d'ordre adaptés au modèle MIST, et pourrons finalement présenter les principaux résultats relatifs à la mesure des exposants critiques.

### 3.2.1 Définition et propriétés des structures propagatives

Les différents diagrammes spatio-temporels, Fig. 3.8, ont révélé l'existence de structures se propageant à vitesse constante. Ces structures (ou ondes solitaires) apparaissent en bordure de domaines turbulents, puis traversent tout ou partie du domaine laminaire adjacent. Suivant les cas, une onde peut traverser ce domaine en laissant derrière elle un autre domaine laminaire, ou au contraire provoquer localement un fort accroissement de la densité de sites turbulents. Il s'agit de deux types fondamentalement différents de structures propagatives puisque les premières transforment les régions laminaires alors que les secondes les détruisent en contribuant significativement à l'accroissement de la fraction turbulente.

Pour comprendre ce que sont réellement ces structures, nous avons tout d'abord étudié un ensemble de solutions particulières que nous appellerons "solitons", et qui se déplacent à vitesse constante.

Dans les paragraphes qui suivent, nous allons dériver les conditions d'exis-

tence et de stabilité de ces solitons lorsqu'ils se propagent à vitesse constante  $v = 1/1$  dans un milieu laminaire uniforme. Puis nous verrons que ces résultats s'appliquent plus généralement à l'ensemble des structures propagatives qui nous intéressent.

**Définition d'un soliton**

Il nous faut tout d'abord définir plus rigoureusement ce que nous entendons par "soliton". Rappelons que nous considérons le cas d'un réseau unidimensionnel de taille infinie dont chaque nœud  $i$  est caractérisé par une variable continue  $x_i$ . L'évolution temporelle se fait par application d'une fonction  $f$  à chaque  $x_i$  puis couplage aux plus proches voisins :

$$x_i^{t+1} = (1 - \epsilon)f(x_i^t) + \frac{\epsilon}{2} [f(x_{i-1}^t) + f(x_{i+1}^t)] \quad . \quad (3.4)$$

Nous noterons  $X^t$  l'ensemble des  $x_i^t$  et  $G$  l'application qui à  $X^t$  associe  $X^{t+1}$ .

Nous appellerons soliton de vitesse rationnelle  $v = p/q$ , un ensemble de  $x_i$  tel que :

$$T^p(X) = G^q(X) = \underbrace{G \circ \dots \circ G}_{q \text{ fois}}(X) \quad . \quad (3.5)$$

où  $T$  est l'opérateur de translation de chaque élément du vecteur  $X$  d'un site. Exprimée en chaque site à tout temps cela revient à imposer l'égalité :

$$x_i^{t+p} = x_{i-q}^t \quad (3.6)$$

**Soliton dans un milieu laminaire uniforme à vitesse  $v = 1/1$**

Dans un premier temps, nous étudions la propagation d'un soliton se déplaçant à la vitesse  $v = p/q = 1/1 = 1$  dans un milieu laminaire uniforme de valeur  $x_{in}$ , et laissant après son passage un milieu laminaire uniforme de valeur  $x_{out}$ .

Nous ajoutons un indice aux éléments du soliton à partir du premier différent de  $x_{in}$  et cherchons donc une solution de la forme

$$X = \{x_{in}, \dots, x_{in}, x_{in}, x_0, x_1, x_2, \dots, x_{out}\} \quad ,$$

vérifiant l'Eq. 3.6 pour  $p = q = 1$ . C'est à dire  $x_i^{t+1} = x_{i-1}^t$ .

On obtient l'ensemble des éléments  $x_n$  d'un soliton par récurrence (en commençant par  $x_0$ ) à partir de cette relation et de l'Eq. 3.4.

$$x_n - \epsilon/2 f(x_n) = (1 - \epsilon)f(x_{n-1}) + \frac{\epsilon}{2}f(x_{n-2}) \quad (3.7)$$

On résume schématiquement cette procédure dans la Fig. 3.13.

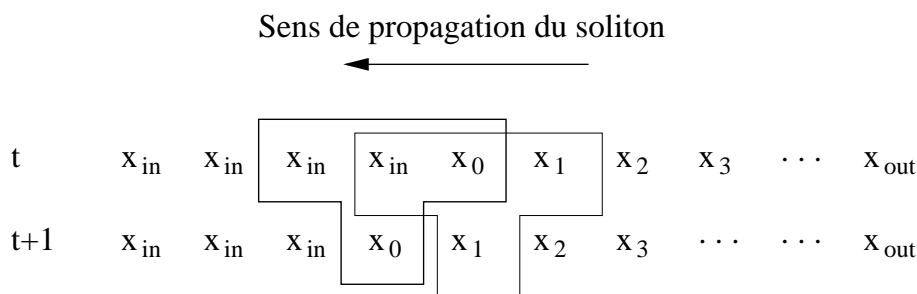


FIG. 3.13 - Représentation schématique de la procédure permettant d'obtenir les éléments d'un soliton de vitesse  $v = 1/1 = 1$  dans un milieu laminaire uniforme  $x_{in}$ . Les régions encadrées délimitent l'ensemble des sites dont les états sont liés par la dynamique déterministe du système 3.4 et dont on extrait les suites  $x_n$  satisfaisant les conditions aux limites.

On remarquera que  $v = 1$  est la vitesse maximale de propagation de l'information - puisque le couplage ne se fait qu'entre les plus proches voisins - et que la relation vérifiée par un élément  $x_m$  ne dépend que de  $x_{in}$  et des  $x_n$  tels que  $n < m$  (l'état d'un site ne peut pas être affecté par ce qui se passe derrière lui).

Par ailleurs, connaissant  $x_{n-1}$  et  $x_{n-2}$ , la valeur de  $x_n$  vérifiant l'Eq. 3.7 n'est pas unique et plusieurs solitons peuvent se propager dans un milieu laminaire donné.

Il faut également noter que  $x_{out}$  n'est pas un paramètre libre du problème puisqu'il apparaît comme la limite des  $x_n$ . Les solitons forment des familles de solutions dépendant de trois paramètres libres  $\epsilon$ ,  $r$  et  $x_{in}$ .

### Condition d'existence

On veut maintenant savoir s'il existe des solitons de vitesse 1 pour toutes les valeurs de  $x_{in}$ . Une condition suffisante est qu'il existe un  $x_0$  turbulent ( $x_0 < 1$ ) satisfaisant l'Eq. 3.7. Elle devient

$$x_0 - \frac{\epsilon}{2}f(x_0) = (1 - \frac{\epsilon}{2})x_{in} \quad . \quad (3.8)$$

Si on impose  $x_0 < 1$ , la différence  $x_0 - \epsilon/2f(x_0)$  admet un maximum positif lorsque  $x_0$  tend vers 1 par des valeurs inférieures. Ce maximum vaut 1, et



est indépendant des valeurs de  $\epsilon$  et  $r$ . Cela signifie qu'il faut que le terme de droite soit inférieur à 1 pour que cette égalité soit vraie. On obtient ainsi une contrainte sur le milieu laminaire uniforme dans lequel un soliton de vitesse  $v = 1$  peut se propager :

$$1 \leq x_{in} \leq \frac{1}{1 - \epsilon/2} \equiv x_c \quad . \quad (3.9)$$

Nous noterons cette borne supérieure  $x_c$ . Nous verrons par la suite que cette borne supérieure du domaine d'existence est associée pour les structures propagatives à une valeur de blocage, fixant une contrainte sur les milieux laminaires dans lesquelles elles peuvent se propager.

De plus, on peut montrer que lorsqu'il existe un  $x_0$  turbulent (il est alors unique), celui-ci est toujours compris dans l'intervalle  $[1/2, 1[$ . On obtient alors la forme exacte de  $x_0$  en fonction de  $x_{in}$  :

$$x_0 = \frac{(1 - \epsilon/2)x_{in} + \epsilon r/2}{1 + \epsilon r/2} \quad . \quad (3.10)$$

On continue alors en exprimant par récurrence,  $x_1, x_2, \dots$ , mais les expressions deviennent rapidement inexploitables et présentent peu d'intérêt. Il sera plus efficace et plus simple de faire, si on le souhaite, une recherche numérique systématique de ces solutions.

### Stabilité de front

Une des questions essentielles concerne les conditions d'apparition des solitons. On suppose assez naturellement que ce sont les fluctuations chaotiques aux bords des zones laminaires qui induisent des conditions favorables à l'apparition des structures propagatives. Il est très improbable, voir impossible, que les fluctuations provoquent l'apparition en bordure de zone laminaire d'un site turbulent ayant exactement la bonne valeur  $x_0$  pour déclencher un soliton. La question est donc de savoir si des systèmes dans un état proche d'une solution particulière convergent vers celle-ci. C'est ce que nous dit l'étude de stabilité.

Il faut noter que l'on ne s'intéresse qu'à la stabilité du front. Cela a un sens car l'évolution du premier site turbulent lorsque l'état turbulent se propage à la vitesse 1, n'est pas affecté par ce qui se passe derrière lui.

Considérons la situation suivante :

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & & i \\
 & & & & & \longrightarrow \\
 & & x_{in} & x_{in} & x_{in} & x_{in} & y_0 \\
 t \downarrow & & x_{in} & x_{in} & x_{in} & y_1 & \cdot \\
 & & x_{in} & x_{in} & y_2 & \cdot & \cdot
 \end{array}$$

où  $y_0$  est une valeur turbulente quelconque, et  $y_n$  la suite des valeurs des sites dans la direction de propagation. On veut savoir si  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0$ , et pour quelles valeurs de  $y_0$  cette convergence a lieu.

Si l'on note  $\delta_n$  l'écart à la valeur  $x_0$ , i.e.  $y_n = x_0 + \delta_n$ , on obtient :

$$\delta_{n+1} = \frac{\epsilon}{2} (f(y_n) - f(x_0)) \tag{3.11}$$

$$= -\frac{\epsilon r}{2} \delta_n \text{ si } y_n \in ]1/2, 1[ \quad . \tag{3.12}$$

Donc sous la condition  $\epsilon r < 2$  et  $|\delta_0| < \min(x_0 - 1/2, 1 - x_0)$ , la suite des  $y_n$  converge vers  $x_0$ . Un point important de ce résultat est que la distance initiale n'a pas besoin d'être infinitésimale pour qu'il y ait convergence. On dit de cet attracteur qu'il est conditionnellement stable (c'est à dire stable pour des perturbations d'amplitude inférieure à une valeur finie).

Au contraire, lorsque  $\epsilon r > 2$ , la suite des  $y_n$  ne converge pas vers  $x_0$ , quelle que soit la perturbation.

Comme nous l'avons déjà dit, les solitons, solutions de l'équation 3.6, ne sont pas uniques même lorsqu'on a fixé  $\epsilon$ ,  $r$  et  $x_{in}$ . On peut par contre utiliser la valeur de  $x_{out}$  ou encore le nombre de sites turbulents dans le soliton, comme quatrième paramètre (non libre) pour différencier les solutions.

On représente sur la Fig. 3.14 les paires de points  $(x_{in}, x_{out})$  correspondant à deux familles distinctes de solitons comprenant respectivement deux et quatre sites turbulents contigus.

Les solitons ne sont définis proprement que dans le cas où le milieu en aval est uniforme. Or le diagramme spatio-temporel de la Fig. 3.12, montre sans ambiguïté que les domaines laminaires ne sont pas uniformes.

Il est donc nécessaire de généraliser la notion de *soliton*, pour aboutir à celle de *structure propagative* dans un milieu à gradient constant.

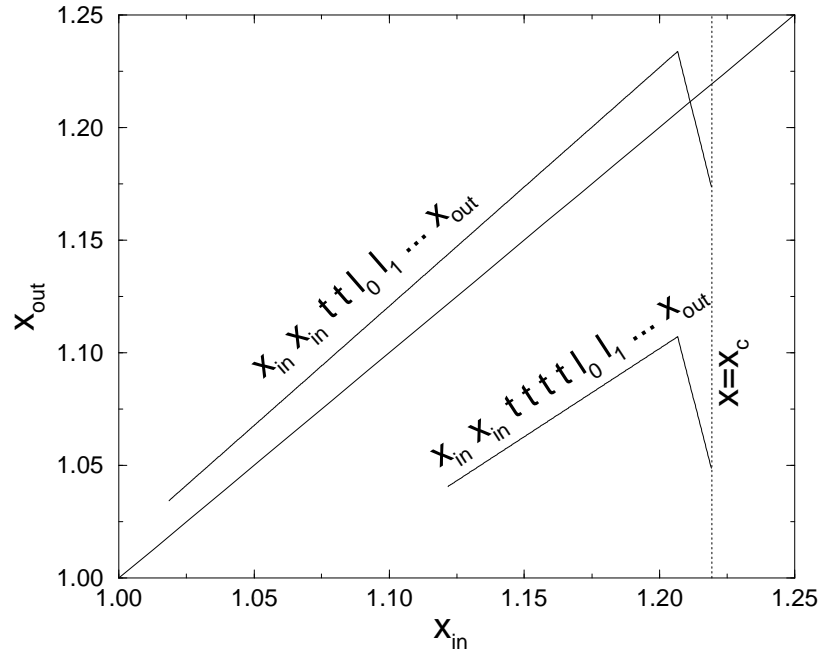


FIG. 3.14 -  $x_{out}$  en fonction de  $x_{in}$  pour différents types de soliton à  $r = 3$  et  $\epsilon = 0.35986 \simeq \epsilon_c$ . Le type des solitons est indiqué en utilisant la notation suivante :  $l$  pour désigner un site laminaire et  $t$  pour un site turbulent. On ajoute un indice aux sites laminaires en partant du premier différent de  $x_{in}$ . Cette représentation a déjà été faite par Grassberger et al. [50] pour les solitons à deux sites turbulents, mais l'interprétation que nous en ferons sera très différente (voir Sect. 3.2.2).

**Structure propagative dans un milieu laminaire à gradient constant**

Par milieu laminaire à gradient constant, on entend un milieu composé de sites laminaire ( $x > 1$ ) tels que la différence (notée  $\Delta$ ) des valeurs prises par des sites voisins est constante<sup>10</sup>.

Nous allons montrer qu'il existe des structures se propageant à vitesse constante (égale à 1) dans un milieu laminaire à gradient constant, dont les propriétés sont interprétables en terme de perturbations au voisinage des solitons que nous venons de décrire.

Si l'on note  $x_{in}^n = x_{in}^0 + n\Delta$  les sites du milieu laminaire dans lequel se propage la structure, on désigne par  $y_n$  la suite des sites turbulents tels que :

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & x_{in}^4 & x_{in}^3 & x_{in}^2 & x_{in}^1 & x_{in}^0 & y_0 & \dots & \\ \dots & x_{in}^4 & x_{in}^3 & x_{in}^2 & x_{in}^1 & y_1 & - & \dots & \\ \dots & x_{in}^4 & x_{in}^3 & x_{in}^2 & y_2 & - & - & \dots & \end{array}$$

On remarquera que la zone laminaire est stable tant qu'elle n'est pas influencée par un des sites  $y_n$  puisque

$$\begin{aligned} & (1 - \epsilon)x_{in}^n + \epsilon/2 (x_{in}^{n-1} + x_{in}^{n+1}) \\ = & x_{in}^0 + \Delta \left[ (1 - \epsilon)n + \frac{\epsilon}{2}(n - 1 + n + 1) \right] \\ = & x_{in} + n\Delta \\ = & x_{in}^n \quad . \end{aligned}$$

La suite des  $y_n$  est donnée par la relation :

$$y_{n+1} = \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) x_{in}^n + \frac{\epsilon}{2} (f(y_n) + \Delta) \tag{3.13}$$

On va montrer qu'il existe une solution linéairement croissante vers laquelle convergent les éléments de la suite. Elle s'obtient en recherchant une solution perturbée autour de la solution homogène locale de la forme  $y_n = y_n^c + \delta_n$ , où

$$y_{n+1}^c = \frac{(1 - \epsilon/2) x_{in}^n + \epsilon r/2}{1 + \epsilon r/2} \tag{3.14}$$

(voir Sect. 3.2.1).

En reportant cette solution dans l'Eq. 3.13, on obtient la suite des  $\delta_n$

$$\delta_{n+1} = -\frac{\epsilon r}{2} \delta_n + \epsilon \Delta \left( \frac{1 + r}{2 + \epsilon r} \right) \quad , \tag{3.15}$$

---

10. Cette situation est idéalisée mais permet de rendre compte des propriétés locales du milieu lorsque les variations du champ local sont suffisamment régulières.

qui admet une solution du type  $\delta_{n+1} = \delta_n$ , stable si  $\epsilon r < 2$ .

Les  $y_n$  sont alors donnés par :

$$y_{n+1} = y_{n+1}^c + 2\epsilon\Delta \frac{1+r}{(2+\epsilon r)^2} \quad .$$

L'hypothèse d'un  $y_n$  turbulent impose :

$$x_{in}^n < x_c - \Delta \frac{1+r}{2+\epsilon r} \frac{\epsilon}{1-\epsilon/2} \equiv x_c^\Delta \quad .$$

Cela montre qu'il existe des structures propagatives stables (au moins au niveau du front) se propageant dans un milieu non-uniforme à gradient constant. Cette propagation a lieu jusqu'à ce que le milieu laminaire soit bloquant ( $x_{in} > x_c$  avec une correction en général faible liée au gradient). La condition de stabilité linéaire pour ces structures est la même que celle des solitons, c'est à dire  $\epsilon r < 2$ .

Cette condition de stabilité est vérifiée pour  $\epsilon_c \simeq 0.35986$  et  $r_c = 3$  qui correspondent au point de transition le plus étudié par P. Grassberger et T. Schreiber. Ces structures sont donc linéairement stables et on s'attend à ce que leur déstabilisation corresponde à l'arrivée dans une zone de la région laminaire, supérieure à  $x_c$ . Pour s'en convaincre, on a représenté Fig. 3.15, le même diagramme spatio-temporel que sur la Fig. 3.12, mais en changeant le code de couleur : un site laminaire est mis en blanc s'il est bloquant ( $x > x_c$ ) et en gris s'il ne l'est pas, alors que les sites turbulents restent en noir.

On peut constater que les structures se propagent sans problème jusqu'à ce qu'elles rencontrent une zone bloquante (ou une autre structure).

### Synthèse

Nous avons montré qu'il était possible d'étudier analytiquement l'existence et la stabilité de structures propagatives de vitesse 1 dans le modèle MIST à  $k = 1$ . Ces structures contribuent à la propagation de l'état turbulent, et on dira que ce sont des vecteurs de l'état turbulent.

Ces résultats suggèrent l'existence de plusieurs domaines de l'espace des paramètres où les propriétés dynamiques de structures propagatives sont significativement différentes :

- $\epsilon r > 2$  : les structures propagatives de vitesse 1/1 sont linéairement instables. Il existe donc un temps typique au delà duquel les structures disparaissent.

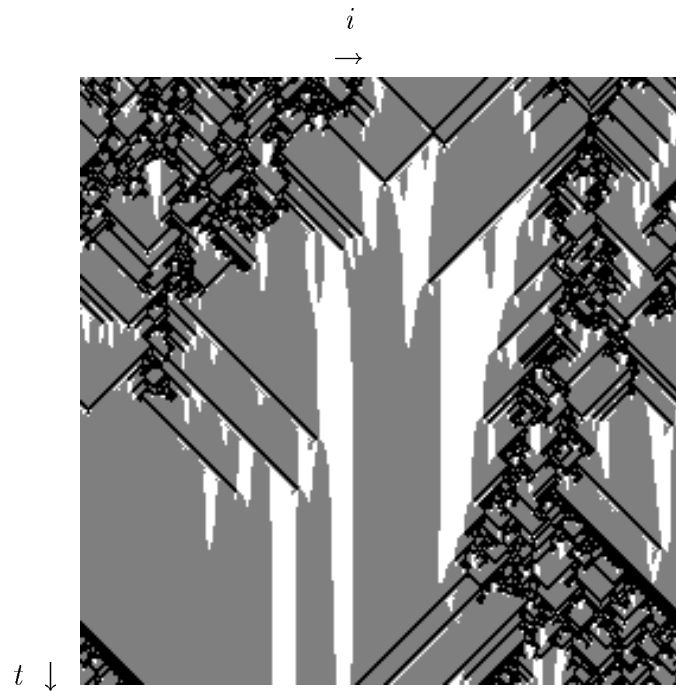


FIG. 3.15 - *Diagramme spatio-temporel pour le modèle MIST ( $r = 3$ ,  $\epsilon = 0.35986$ ,  $k = 1$ ),  $L = 256$  et 256 itérations. Les sites turbulents  $x < 1$  sont en noir, les sites laminaires non bloquants  $1 \leq x < x_c$  sont en gris et les sites laminaires bloquants  $x \geq x_c$  sont en blanc. On peut voir que les structures propagatives sont stoppées par les domaines laminaires bloquants. Le temps croît de haut en bas.*

•  $\epsilon$  petit : les structures de vitesse 1 ne peuvent plus jouer un rôle important dans la dynamique car le milieu laminaire est essentiellement bloquant dans le voisinage des points de transition. On représente sur la Fig. 3.16 le rapport  $R$  entre la longueur du segment bloquant  $[1, x_c]$  et la longueur du domaine laminaire  $[1, r/2]$  aux différents points de transition.

$$R = \frac{2\epsilon_c}{(2 - \epsilon_c)(r_c - 2)} \quad (3.16)$$

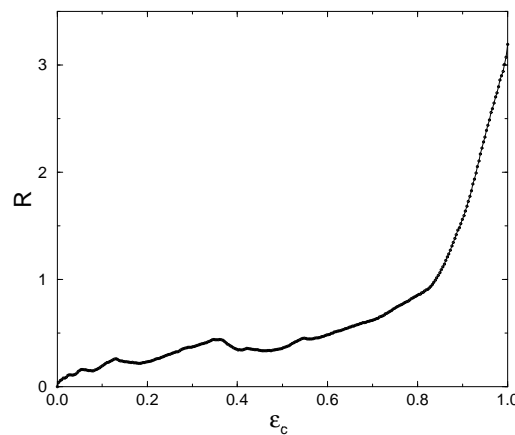


FIG. 3.16 - Poids du domaine laminaire bloquant comparé à celui du domaine laminaire. On peut constater que  $R$  tend vers 0 lorsque  $\epsilon_c$  s'approche de 0, indiquant que les structures de vitesse 1/1 ne peuvent plus se propager significativement dans les régions laminaires.

• Pour les autres : nous sommes en présence de points de transition où les structures propagatives de vitesse 1, sont linéairement stables mais ne peuvent se propager dans n'importe quel milieu laminaire.

Ces résultats ne concernent que les structures propagatives de vitesse  $v = 1/1$ . Il est beaucoup plus difficile d'étudier les solitons de vitesse inférieure car le milieu laminaire dans lequel ils se propagent n'est plus uniforme. Il existe en effet un "précurseur" en amont du premier site turbulent qui modifie le milieu au fur et mesure de sa propagation. Le cas  $v = 1$  est plus simple à étudier car il s'agit de la vitesse maximale de propagation.

Il existe deux types distincts de structures propagatives : celles qui laissent une région laminaire derrière elles, et celles qui laissent un milieu où la densité de sites turbulents est élevée. Ce point est difficile à aborder analytiquement. Cependant on peut remarquer que tout ce que nous avons dit concernant la propagation de la structure est liée à la propagation du premier site turbulent, et que cela est valable pour les deux types de structure.

L'étude de stabilité notamment, ne concerne que le front et le fait que l'état turbulent se propage, ou pas. Si on regarde attentivement la Fig. 3.15, on remarque que les structures qui laissent un milieu laminaire derrière elles sont composées de deux sites turbulents, alors que celles dont la queue est turbulente<sup>11</sup> sont constituées de quatre ou cinq sites turbulents consécutifs. On peut ainsi facilement distinguer ces deux types de structures.

De plus, une étude de stabilité qui ne serait pas limitée à la région du front, montrerait probablement que les premières sont stables alors que les secondes non. L'instabilité de certaines familles de structures propagatives est un des éléments clés de l'étude des propriétés de propagation de l'état turbulent car elle est associée à une croissance rapide sur de très grandes régions de la densité de sites turbulents.

Le rôle des structures moins larges, composées de deux sites turbulents, est moins évident. Nous allons revenir sur ce point dans la section suivante.

### 3.2.2 Structures propagatives et universalité

Nous reprendrons dans cette section la théorie du "gaz de solitons" telle qu'elle a été suggérée par P. Grassberger et T. Schreiber. Nous verrons qu'elle ne s'applique que partiellement au cas du modèle MIST, et que par ailleurs elle ne permet pas d'expliquer l'émergence de comportements critiques différents de ceux de la classe d'universalité de la percolation dirigée.

Nous utiliserons pour cela un modèle probabiliste idéalisant les mécanismes avancés dans cette théorie. Nous constaterons alors que les structures propagatives ne doivent pas être comptabilisées dans le paramètre d'ordre sous peine de masquer l'existence d'un point de transition ou de fausser les mesures d'exposants.

---

11. C'est ainsi que l'on fera référence à l'accroissement significatif de la densité de sites turbulents après le passage d'une structure propagative.



### Théorie du gaz de solitons

Toute l’argumentation de la théorie du gaz de solitons [50], tourne autour de l’existence de structures propagatives de durée de vie *infinie* pouvant donc traverser des zones laminaires de taille quelconque, et ainsi propager l’état turbulent sur des échelles spatiales de l’ordre de la taille des zones laminaires. On est dans ce cas en face d’un mécanisme de propagation de l’état turbulent dont l’efficacité est corrélée à la taille des zones laminaires, comme c’est le cas pour les mécanismes de la “parity conserving class” (voir appendice C (Sect. 3.7)).

P. Grassberger et T. Schreiber discutent l’existence possible d’un “gaz de solitons”<sup>12</sup> au sein des zones laminaires, et font l’analyse des solitons existants au point de transition ( $r_c = 3, \epsilon_c \simeq 0.35986$ ). Ils constatent que pour certains de ces solitons, la valeur du milieu laminaire laissé après leur passage est la même que celle du milieu dans lequel il se propage (i.e.  $x_{out} = x_{in}$ , voir Fig. 3.14).

Ils font alors l’hypothèse que ce sont ces solutions très particulières qui peuvent propager systématiquement l’état turbulent dans des zones laminaires supposées uniformes et parcourues par des vagues de solitons. Reste alors à déterminer le résultat des interférences entre deux solitons de vitesses opposées lorsqu’ils se croisent. C’est la théorie du gaz de solitons se propageant dans les domaines laminaires uniformes.

Leur argumentation souligne que si ces structures sont instables, elles possèdent un temps de vie moyen fini. Donc en supposant qu’elles sont à l’origine d’un comportement critique différent de celui de la classe d’universalité de la percolation dirigée, on s’attend à observer une transition entre deux régimes algébriques distincts. Le seul défini dans la limite des temps infinis est celui signifiant l’appartenance à la classe d’universalité de la percolation dirigée<sup>13</sup>.

Cette théorie admet plusieurs limitations :

- La première est qu’elle est basée sur l’existence de solutions particulières qui ne sont pas celles que l’on observe à  $r = 3$  puisque le milieu laminaire n’est pas uniforme (voir la distinction que l’on a faite entre solitons et structures propagatives dans la section précédente).

- La seconde est qu’ils supposent que le temps de vie moyen fini, qu’ils déduisent des histogrammes au seuil de la transition, est le signe d’une insta-

---

12. Il faut préciser qu’ils pensent alors aux solitons composés de deux sites turbulents.

13. Cette discussion a été présentée plus longuement dans la Sect. 3.1.3.

bilité “intrinsèque” aux solitons qu'ils décrivent, indépendamment du milieu dans lequel ils se propagent.

Nous avons vu que le critère de stabilité linéaire des solitons et des structures propagatives en milieu laminaire à gradient constant est  $\epsilon r < 2$ . Ce critère est vérifié dans tout le voisinage du point de transition qu'ils ont principalement étudié. Reste à comprendre dans ce cas, pourquoi le temps de vie moyen de ces structures est fini et si cela a une influence sur l'existence et l'universalité des transitions. Nous reviendrons longuement sur ce point dans la Sec. 3.3.

- Finalement, ils ne soulèvent que très indirectement la question de la définition du paramètre d'ordre (Ils constatent que pour certaines valeurs des paramètres, on ne voit pas de transition à cause de l'existence de solitons), sans réellement en tirer de conséquences pratiques. Nous allons discuter ce point dans la section suivante.

### “Gaz de solitons” et universalité

La première réflexion que cela doit nous inspirer est que la réduction des états de la dynamique locale à seulement deux catégories, laminaire ou turbulent, est difficile à tenir. A ce stade du manuscrit nous avons déjà présenté au moins quatre sous-ensembles distincts :

**état turbulent** : ensemble des états où l'application locale  $f$  est dilatante  
 $\Leftrightarrow x < 1$  dès que  $r > 1$ .

**état laminaire** : ensemble des états stationnaires, ou convergeant systématiquement vers un état stationnaire  $\Leftrightarrow x \geq 1$  pour  $|k| \leq 1$ .

**état laminaire bloquant** : ensemble des états laminaires tels qu'il n'existe aucun soliton se propageant dans un milieu uniforme ayant cette valeur  
 $\Leftrightarrow x > x_c = 1/(1 - \epsilon/2)$  pour  $k = 1$ .

**état laminaire non bloquant** : ensemble des états laminaires tels qu'il existe des solitons se propageant dans un milieu uniforme ayant cette valeur  
 $\Leftrightarrow 1 < x < x_c = 1/(1 - \epsilon/2)$  pour  $k = 1$ .

Il existe un autre type moins bien défini en terme d'états locaux, que l'on dira “propagatif” ou “soliton”. Ce sont des états répondant à la définition des états turbulents, mais ceux-ci font partie d'une structure propagative stable. Si on se place dans un repère en translation uniforme à la vitesse de la structure, la dynamique locale “effective” n'est plus dilatante puisqu'il y a

convergence vers la solution particulière. Cette définition reste ambiguë car elle n'est plus locale et qu'à un temps donné, il faut examiner l'état du système dans le voisinage pour identifier l'appartenance ou non à une structure propagative.

Pour reprendre à la base l'argumentation de P. Grassberger et T. Schreiber, nous devons noter qu'ils prédisent un "cross-over" lié au temps de vie fini des structures propagatives. Cela suppose l'existence d'un point de transition et d'un comportement critique différent de celui de la percolation dirigée lorsque leur temps de vie est infini.

L'étude d'un modèle probabiliste aussi simple que possible, incluant une dynamique de type percolation dirigée à laquelle vient s'ajouter la présence de solitons favorisant la propagation de la phase turbulente, doit nous permettre d'étudier l'existence de ce régime non-universel.

Ce modèle est défini sur la même structure de réseau triangulaire que la version unidimensionnelle de la percolation dirigée, décrite dans l'appendice B, (Sect. 3.6).

Nous en présentons maintenant les règles d'évolution :

- Chaque site peut être dans un des 5 états suivants : laminaire ( $l$ ), turbulent ( $t$ ), soliton gauche ou droit ( $s_+$  et  $s_-$ ), et superposition de solitons gauche et droit ( $s_{\pm}$ ).
- Les sites turbulents peuvent donner naissance à des sites laminaires, turbulents ou à des solitons susceptibles de se propager dans les zones laminaires sans interagir (les solitons de vitesses opposées se croisent, et poursuivent leur chemin).
- L'état  $s_-$  est symétrique de l'état  $s_+$ , et l'état  $s_{\pm}$  est formellement la superposition d'un  $s_+$  et d'un  $s_-$ .
- Lorsqu'un site turbulent est au contact d'un soliton, la règle d'évolution est la même que lorsqu'il s'agit de deux sites turbulents (la présence de solitons dans le milieu laminaire favorise la propagation des sites turbulents).

Le détail des règles est présenté dans le tableau<sup>14</sup> 3.3.

La Fig. 3.17 illustre des évolutions spatio-temporelles typiques, en utilisant ces règles.

En utilisant la densité de sites turbulents (qui exclue les solitons) comme paramètre d'ordre, on observe des transitions continues entre un régime d'intermittence spatio-temporelle et un des états absorbants.

---

14. Consulter l'appendice B (Sect. 3.6.) pour la lecture de ce tableau

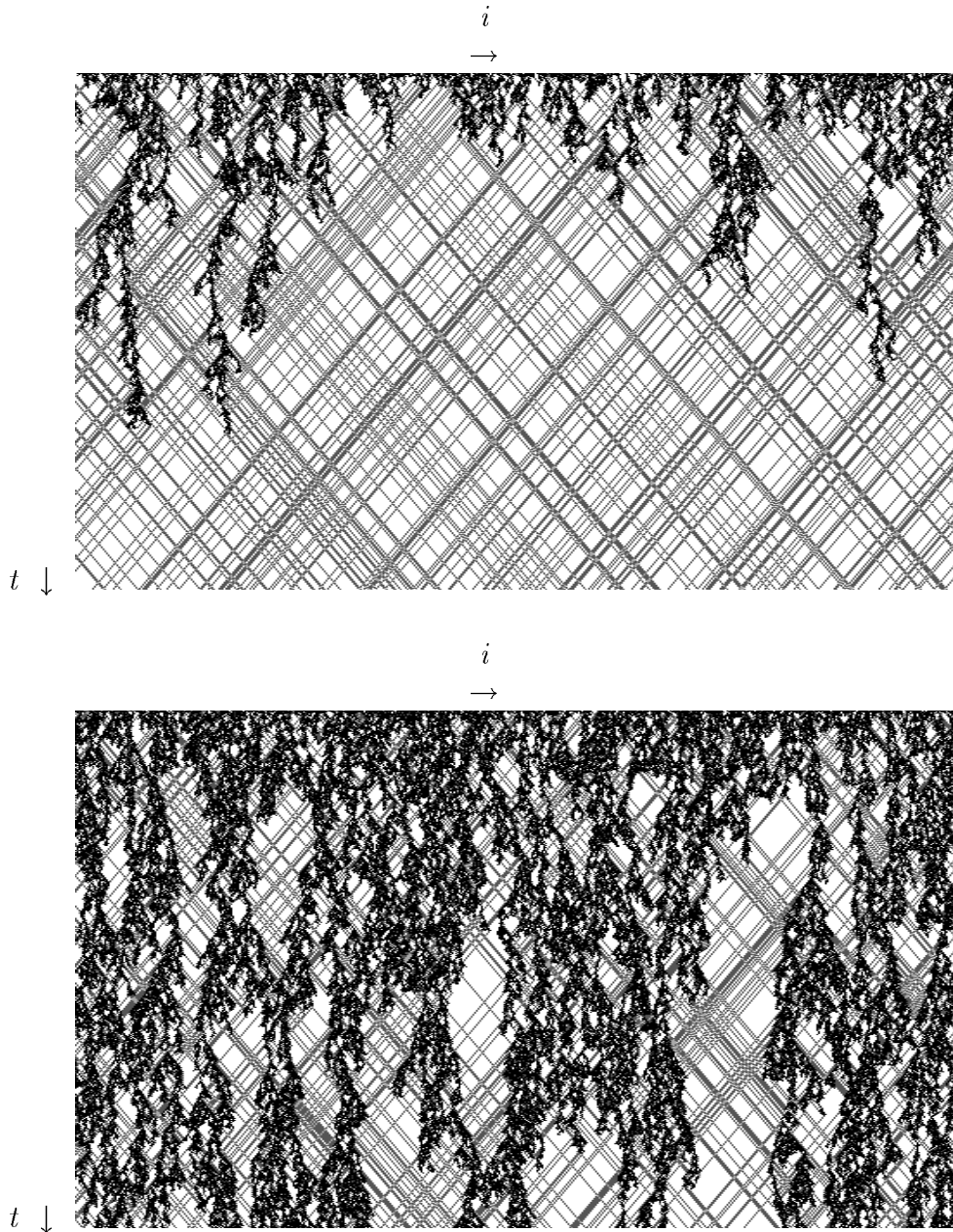


FIG. 3.17 - Evolution spatio-temporelle typique du modèle laminaire-turbulent-soliton-I où les solitons se propagent dans un milieu laminaire unique et se croisent sans interférer pour  $p = 0.662$ ,  $q = 0.85$  (haut) et  $p = 0.70970$ ,  $q = 0.85$  (bas). Ces images correspondent à des réseaux de 512 sites et 512 itérations (le temps va de haut en bas). Les sites turbulents sont en noir, les solitons en gris et les laminaires en blanc. La figure du haut est sous un seuil de transition, alors que celle du bas est dans son voisinage.

$x \setminus y$	$t$	$s_+$	$s_-$	$s_{\pm}$	$l$
$t$	$t$	$(2p - p^2)q$	$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$
	$s_+$	$(2p - p^2)(1 - q)/2$	$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$
	$s_-$	$(2p - p^2)(1 - q)/2$	$tt$	$tt$	$tt$
	$l$	$(1 - p)^2$	$tt$	$tt$	$lt$
$s_+$	$\Leftrightarrow$	$s_+$	$s_{\pm}$	$s_{\pm}$	$s_+$
$s_-$	$\Leftrightarrow$	$l$	$s_-$	$s_-$	$l$
$s_{\pm}$	$\Leftrightarrow$	$s_+$	$s_{\pm}$	$s_{\pm}$	$s_+$
$l$	$t$	$pq$	$l$	$s_-$	$l$
	$s_+$	$p(1 - q)/2$	$l$	$s_-$	$l$
	$s_-$	$p(1 - q)/2$	$l$	$s_-$	$l$
	$l$	$(1 - p)$	$l$	$s_-$	$l$

TAB. 3.3 - Tableau récapitulatif des règles d'évolution de l'automate laminaire-turbulent-soliton-I.

L'état macroscopique absorbant est ici dégénéré, mais il existe un état privilégié laissé par la mort de la phase turbulente (voir diagramme du haut de la Fig. 3.17). On peut se convaincre de la dégénérescence de l'état absorbant en remarquant que les règles locales conservent la densité de solitons si la densité de sites turbulents est nulle.

On retrouve donc un état laminaire effectif statistiquement bien défini, non dégénéré à une échelle réduite ("coarse-grained"). Dans ce cas la conjecture de Grassberger<sup>15</sup> sur l'existence de la classe d'universalité de la percolation dirigée doit s'appliquer (voir appendice B (Sect. 3.6)).

C'est ce que confirme la Fig. 3.18, où l'on représente l'évolution temporelle de la densité de sites turbulents pour un des points critiques  $p_c = 0.70970(5)$  et  $q_c = 0.85$ :

Si nous avons inclus la densité de solitons dans la définition du paramètre d'ordre, nous n'aurions pas observé de transition, celui-ci étant non nul pour presque toutes les valeurs des paramètres et conditions initiales.

Dans ce cas, l'existence de structures propagatives soulève avant tout la question de la définition de l'état turbulent et donc d'un paramètre d'ordre

15. A ne pas confondre avec celle de Pomeau.

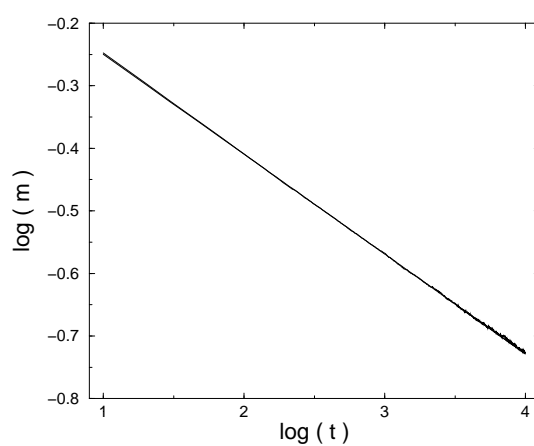


FIG. 3.18 - Densité de sites turbulents ( $m$ ) en fonction du temps pour  $p = 0.70970 \sim p_c$ ,  $q = 0.85$ , un réseau de  $5 \cdot 10^6$  sites pour le modèle laminaire – turbulent – soliton – I. On a superposé la fonction  $y = 0.813 t^{-0.1597}$ , qui est presque indiscernable confirmant l'appartenance de ce modèle à la classe d'universalité de la percolation dirigée, sous réserve que les autres exposants soient également identiques.

$x \backslash y$	$t$	$s_+$	$s_-$	$l$
$t$	$t \quad (2p - p^2)q$ $s_+ \quad (2p - p^2)(1 - q)/2$ $s_- \quad (2p - p^2)(1 - q)/2$ $l \quad (1 - p)^2$	$\Leftrightarrow$ $tt$	$\Leftrightarrow$ $tt$	$\Leftrightarrow$ $lt$
$s_+$	$\Leftrightarrow$ $tt$	$s_+$	$l$	$s_+$
$s_-$	$\Leftrightarrow$ $tt$	$l$	$s_-$	$l$
$l$	$t \quad pq$ $s_+ \quad p(1 - q)/2$ $s_- \quad p(1 - q)/2$ $l \quad (1 - p)$	$l$	$s_-$	$l$

TAB. 3.4 - Récapitulatif des règles d'évolution de l'automate cellulaire probabiliste avec annihilation des solitons.

adapté au système étudié.

En conclusion, les solitons ne sont pas des vecteurs *efficaces* de l'état turbulent lorsqu'ils se propagent et se croisent sans interférer. Et à ce titre leur densité ne doit pas être incluse dans le paramètre d'ordre.

La situation serait différente si, par exemple, les solitons au lieu de se croiser sans interférer pouvaient nucléer un site turbulent. Nous serions alors obligés d'inclure la densité de solitons dans le paramètre d'ordre.

Le cas sans interférence est un peu simpliste dans la mesure où le point critique est masqué par les structures propagatives, et que par ailleurs, ce n'est pas le plus fréquent (voir Fig. 3.15).

Nous allons maintenant étudier une variante de ce modèle.

### Annihilation des solitons

On change pour cela la règle donnant le résultat d'une collision entre solitons de vitesses opposées, qui aboutit maintenant à leur annihilation.

On résume les nouvelles règles dans le tableau 3.4, en notant qu'elles ne diffèrent que par le résultat du cas  $s_+s_-$  qui donne un site laminaire. La Fig. 3.19 présente un diagramme spatio-temporel typique.

La première grosse différence est qu'un état de type "gaz de solitons" préservant la symétrie  $s_+/s_-$ , n'est plus un état absorbant. Lorsque la densité de

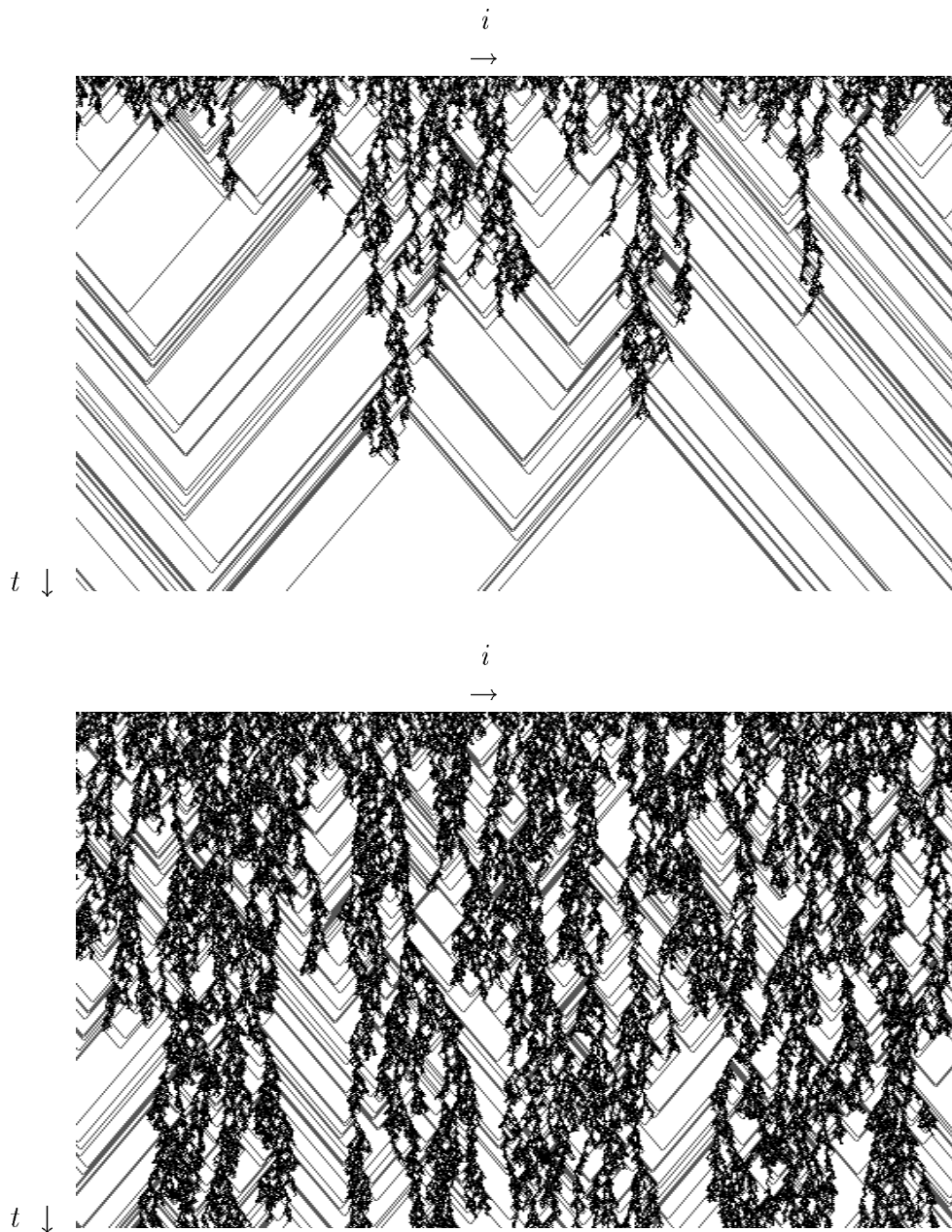


FIG. 3.19 - Evolution spatio-temporelle typique du modèle laminaire-turbulent-soliton-II où les solitons se propagent dans un milieu laminaire unique et s'annihilent. La figure du haut ( $p = 0.685$  et  $q = 0.85$ ) correspond au comportement observé sous le seuil : la densité de sites turbulents devient nulle et l'on observe la propagation et l'annihilation des solitons de vitesses opposées. La Figure du bas ( $p = 0.72215$  et  $q = 0.85$ ) est très proche du point de transition. Les diagrammes représentent 512 sites et 512 itérations (le temps croît de haut en bas). Les sites turbulents sont en noir, les solitons en gris et les laminaires en blanc.



sites turbulents est nulle, un régime que nous dirons de type *propagation – annihilation* apparaît. Il se caractérise par la décroissance en  $1/\sqrt{t}$  de la densité de solitons.

La Fig 3.20 montre l'évolution de la densité totale (turbulents+solitons) pour des valeurs de  $p$  sous le seuil, montrant comment la densité de solitons est tout d'abord esclave de la densité de sites turbulents (qui décroît exponentiellement sous le seuil), puis finalement décroît en  $1/\sqrt{t}$ .

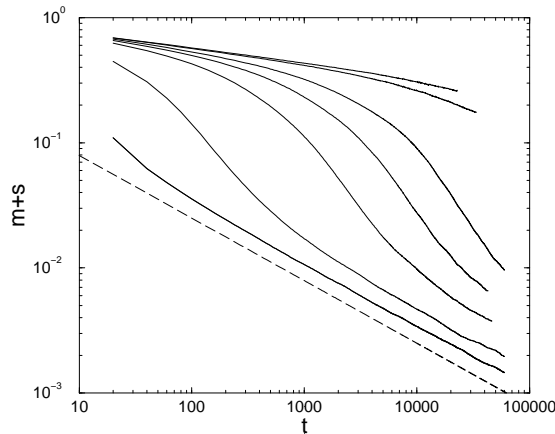


FIG. 3.20 - Densité totale en fonction du temps pour  $q = 0.85$ ,  $L = 5 \cdot 10^6$  et plusieurs valeurs de  $p$  sous le point critique. Les courbes les plus basses (correspondant aux valeurs de  $p$  les plus éloignées du seuil) montrent nettement la transition vers le régime en  $1/\sqrt{t}$  (ligne en tirets).

Contrairement au cas précédent où les solitons se croisaient, inclure les solitons dans le paramètre d'ordre ne masque pas la transition qui reste bien définie dans la limite de taille et de temps infinis même si le régime sous le seuil est algébrique et non plus exponentiel comme précédemment<sup>16</sup>.

La question est maintenant de savoir à quelle classe d'universalité ce modèle appartient, et si inclure ou non la densité de solitons modifie la réponse à cette question.<sup>17</sup>

16. Cette situation est déjà présente dans les modèles de la "parity conserving class", et ne pose pas de réel problème.

17. Il faut rappeler qu'il est plus aisé de répondre à cette question pour un modèle de ce type où les sites turbulents et les solitons sont explicitement distincts. Il n'en est pas de même pour le modèle MIST ou les systèmes expérimentaux.

Comme nous l'avons expliqué dans l'appendice A (Sect. 3.5), la localisation d'un point de transition et de l'exposant critique  $\alpha$  passe par la recherche d'un régime algébrique, non trivial, du paramètre d'ordre en partant d'une condition initiale décorrélée où tous les sites du réseau sont initialement turbulents. Ces mesures se font en temps et en taille finie, ce qui a pour conséquence de donner une mesure approximative de ce qui se passe dans la limite thermodynamique.

On montre sur les Fig. 3.21 et 3.22 les régimes algébriques localisés selon le protocole usuel (voir appendice A), en utilisant d'une part l'aimantation totale (turbulents et solitons), et l'aimantation habituelle (turbulents seuls). Les seuils déterminés sont légèrement différents, alors que les exposants sont complètement différents (0.11 à comparer à 0.16).

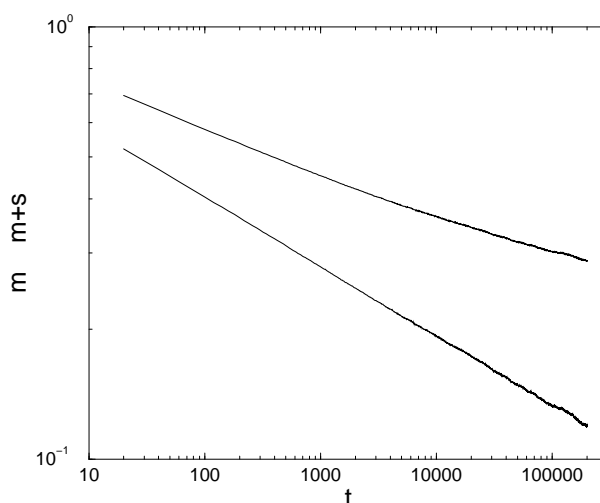


FIG. 3.21 - Densité de sites turbulents  $m$  (courbe du bas) et densité totale  $m + s$  (turbulent+solitons, courbe du haut) en fonction du temps, pour  $p = 0.72215 \sim p_c$ ,  $q = 0.85$  et un réseau de  $L = 10^7$  sites. La mesure de  $\alpha$  confirme l'appartenance probable à la classe d'universalité de la percolation dirigée.

Dans le cas où l'on a utilisé la densité totale pour isoler le régime algébrique, la densité de sites turbulents suit déjà un régime de décroissance exponentielle très marqué suggérant que le comportement algébrique observé n'est que transitoire. Si on ne pouvait pas faire de distinction entre les solitons et les turbulents, nous ferions une mesure erronée de  $\alpha$ .

Au point de transition (le seul défini dans la limite thermodynamique), la densité de sites turbulents suit une décroissance algébrique gouvernée par l'exposant de la percolation dirigée, alors que la densité totale décroît plus

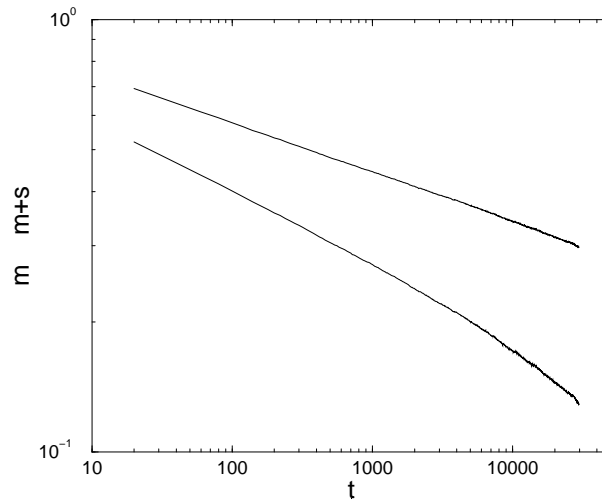


FIG. 3.22 - Densité de sites turbulents  $m$  (courbe du bas) et densité totale  $m + s$  (turbulent+solitons, courbe du haut) en fonction du temps, pour  $p = 0.72170 < p_c$ ,  $q = 0.85$  et un réseau de  $L = 5 \cdot 10^6$  sites. Si on se fie à la mesure de la densité totale, on peut mesurer un exposant de l'ordre de 0.11, différent de celui de la classe d'universalité de la percolation dirigée.

lentement qu'une loi de puissance. Il n'est pas simple de prédire l'existence d'un comportement algébrique à temps très longs, et la question reste ouverte.

### Synthèse

Nous avons montré dans les paragraphes précédents les limites de l'argumentation de P. Grassberger et T. Schreiber. En effet, ces exemples confirment, une fois de plus, la robustesse de la classe d'universalité de la percolation dirigée. Mais, ils soulignent également que la difficulté principale induite par l'existence de structures propagatives, réside dans la définition d'un paramètre d'ordre adapté.

Pour tenir compte de cet effet, nous avons cherché des critères permettant, pour le modèle MIST, de distinguer les sites turbulents et les sites compris dans les structures propagatives.

### 3.2.3 “Bons” paramètres d'ordre et exposants critiques

Nous allons tout d'abord montrer comment nous nous sommes prémunis contre les risques liés à la présence de structures propagatives dans le modèle

MIST. Une fois ces “garde-fous” définis, nous présenterons nos principaux résultats concernant les mesures directes d'exposants.

**Définition de paramètres d'ordre adaptés au modèle MIST**

Cela peut se faire de plusieurs manières, mais nous nous sommes principalement orientés vers l'étude des distributions des valeurs prises par les sites.

Cela est en grande partie suggéré par l'étude des domaines d'existence des solitons (et donc des structures propagatives que l'on a dérivées à partir d'eux) qui montre que certaines valeurs comprises dans l'intervalle  $[0, 1]$  ne peuvent correspondre à des sites composant une structure propagative<sup>18</sup>. Dès lors, la “signature” en terme d'histogramme ne peut pas être identique pour deux catégories distinctes de sites.

Il ne s'agit pas d'identifier strictement les sites turbulents et les sites inclus dans des solitons, mais plutôt de voir si l'évolution temporelle des distributions suggère ou non l'existence de plusieurs types de sites turbulents.

Même avec un nombre de sites  $N$  de l'ordre de  $10^7$ , les distributions instantanées sont très affectées par les effets de taille finie. On a donc choisi de cumuler en temps les différents histogrammes. Le nombre de sites turbulents décroissant en loi de puissance, il faut que le nombre d'itérations cumulées croisse avec le temps afin qu'aucune partie des histogrammes ne se vide.

Soit  $\mu(x, t)$  (resp.  $U(x, t_i)$ ) la densité de probabilité instantanée (resp. cumulée entre  $t_i$  et  $t_{i-1}$ ) associée à la variable  $x$ . Les temps de cumul sont tels que  $t_i = 10^{(1.25+0.25i)}$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, \infty\}$ . On notera que le rapport  $t_i/t_{i-1}$  est constant et que le cumul se fait sur un quart de décade<sup>19</sup>.

De plus, les histogrammes nécessitent qu'une longueur  $\Delta x$  de discrétisation en  $x$  soit définie. Dans la pratique, celle-ci a été prise entre  $1/1000$  et  $1/10000$  de l'intervalle total, afin de déterminer avec précision la position de points particuliers où les distributions ne sont pas dérivables.

La normalisation des distributions s'écrit simplement :

$$\int_0^{r/2} \mu(x, t) dx = 1$$

---

18. Par exemple, nous avons vu que le site  $x_0$  qui est le premier site turbulent d'une structures propagatives de vitesse  $v = 1$ , est toujours compris dans l'intervalle  $].5, 1[$ .

19. Dans ce contexte, un décade est une unité de mesure relative représentant une variation de 1 dans une échelle logarithmique, soit une augmentation d'un facteur 10, en échelle linéaire.

$$\begin{aligned} \int_0^{r/2} U(x, t_i) dx &= \int_0^{r/2} \sum_{t=t_{i-1}}^{t_i} \mu(x, t) \\ &= t_i - t_{i-1} \end{aligned}$$

Cependant, on préférera une normalisation différenciée pour les sites turbulents et les sites laminaires et on définira ainsi les deux distributions suivantes

$$\rho_t(x, t_i) = \frac{U(x, t_i)}{M(t_i)}, \quad x \in [0, 1] \quad (3.17)$$

$$\rho_l(x, t_i) = \frac{U(x, t_i)}{((t_i - t_{i-1}) - M(t_i))}, \quad x \in ]1, r/2] \quad (3.18)$$

où

$$M(t_i) = \sum_{t=t_{i-1}}^{t_i} m(t) \quad (3.19)$$

Bien que les histogrammes soient cumulés, il y a parfois des problèmes de résolution, et nous ajoutons une autre observable donnée par l'intégrale de la densité de probabilité instantanée entre  $x$  et  $y$

$$m_X(x, y, t) = \int_x^y \mu(z, t) dz \quad . \quad (3.20)$$

On notera qu'avec ces définitions, la densité de sites turbulents est égale à  $m_X(0, 1, t)$ .

On calcule le plus souvent l'intégrale en partant des valeurs inférieures ( $x = 0$ ) car c'est là qu'il y a le moins de valeurs associées aux solitons. L'idée étant que pour les petites valeurs de  $y$ ,  $m_X(0, y, t)$  suit l'évolution des "vrais" turbulents alors que  $m(t)$  inclut tous les types de sites, dont ceux correspondant aux structures propagatives.

### Illustration à partir d'un exemple analytique

Nous allons nous inspirer des résultats du modèle avec annihilation des solitons pour synthétiser des distributions qui, par construction, correspondront à un cas où la densité de solitons n'a pas la même évolution temporelle que la densité de sites turbulents.

Dans ce modèle, la densité totale de sites turbulents (turbulents et solitons,  $m + s$ ) varie comme  $t^{-0.11}$ , alors que l'on est sous le seuil de la transition avec des signes manifestes de décroissance exponentielle sur la densité de sites turbulents (sans les solitons,  $m$ ), Fig. 3.22. Nous nous plaçons dans un cas similaire, la question étant de savoir si on peut apercevoir quelque chose sur

les distributions. Nous allons en fait construire une distribution  $\mu(x, t)$  qui sera la somme de deux distributions caractéristiques des deux types de sites :

$$\mu(x, t) = \mu_m(x)m(t) + \mu_s(x)s(t) \quad (3.21)$$

où  $\mu_m$  est la distribution caractéristique des valeurs prises par les sites turbulents (hors structures propagatives) dont la densité en fonction du temps est notée  $m$  , et  $\mu_s(x)$  la distribution associée aux structures propagatives. Nous imposons arbitrairement les formes suivantes :

$$\begin{aligned} m(t) &= 0.5 t^{-0.16} \exp(-t/5000) \\ s(t) + m(t) &= t^{-0.11} \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \mu_m(x) &\propto x(1-x) \\ \mu_s(x) &\propto x \exp(-3|x-1|) \text{ si } x \in [0.25, 1] \\ &= 0 \text{ si } x \in [0, 0.25[ \quad . \end{aligned}$$

La proportionnalité des expressions de  $\mu_s$  et  $\mu_m$  fait évidemment référence à la normalisation de ces distributions.

Ce cas est typique (par construction) de ce qui se passe lorsqu'il existe une population de structures propagatives dont la densité décroît plus lentement que les "vrais" sites turbulents.

Pour faciliter l'interprétation des résultats, on va le comparer à *un autre cas* où la densité de structures propagatives décroît plus vite que la densité de sites turbulents. Nous avons évidemment utilisé les mêmes distributions  $\mu_m$  et  $\mu_s$  et choisi

$$\begin{aligned} m(t) &= 0.5 t^{-0.16} \\ s(t) &= 0.5 t^{-0.5} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Nous représentons sur la Fig. 3.23, les distributions  $\mu(x, t)$  pour ces deux cas à différents temps, et sur la Fig. 3.24 la fonction  $m_X(0, y, t)$  pour différentes valeurs de  $y$ .

Ces deux représentations montrent que l'existence de deux catégories distincts de sites turbulents ("vrais" turbulents et structures propagatives) est visible sur les distributions via un effet de type "vases communicants", ou encore sur l'évolution temporelle de  $m_X(0, y, t)$ . Pour cette dernière, on peut réécrire cela de manière plus générale sous la forme :

$$m_X(0, y, t) = [m(t) + s(t)] \int_0^y \mu_m(z) dz + s(t) \int_0^y [\mu_s(z) - \mu_m(z)] dz \quad (3.24)$$

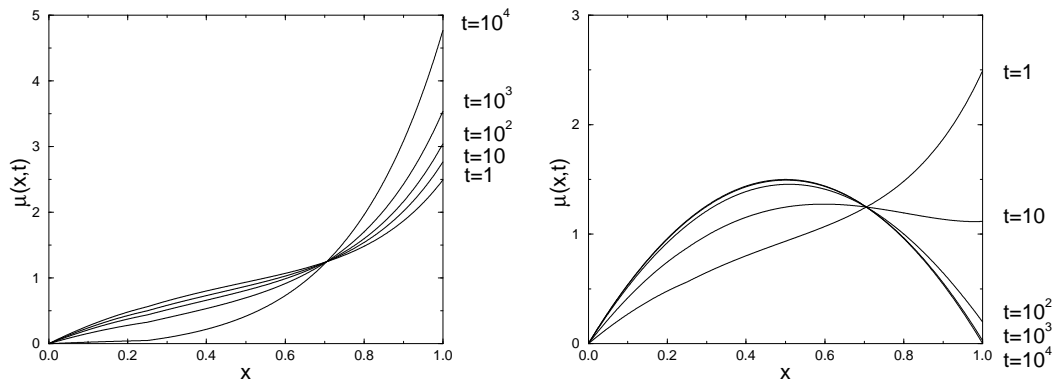


FIG. 3.23 - Distributions  $\mu(x,t)$  en utilisant les densités Eq. 3.22 (gauche) et Eq. 3.23 (droite) au temps  $t = 1, 10, 100, 1000$  et  $10000$ . On peut constater que dans le cas où la densité de solitons décroît plus lentement que la densité de sites turbulents (gauche), la distribution n'a pas convergé alors que la densité totale suit une loi de puissance dont on peut extraire une mesure de  $\alpha$ . On observe un processus de type "vases communicants" qui révèle l'existence de deux catégories distincts de sites. Au contraire, lorsque la densité de solitons décroît plus rapidement (droite) ou, de la même façon que la densité de sites turbulents, la distribution  $\mu$  converge vers la distribution  $\mu_m$ .

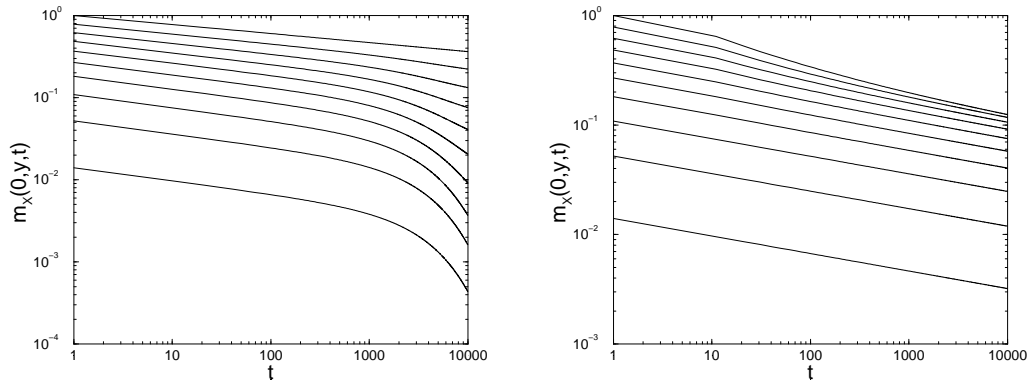


FIG. 3.24 -  $m_x(0,y,t)$  en fonction du temps pour  $y = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$  et  $1$  (de bas en haut,  $m_x$  est une fonction croissante de  $y$ ). La figure de gauche (resp. droite) est obtenue en utilisant les densités de l'eq. 3.22 (resp. 3.23). On voit sans problème sur la figure de gauche que le comportement temporel de la fonction  $m_x(0,y,t)$  pour les petites valeurs de  $y$  est très différent de la variation de la densité totale. Elle ne suit que la densité des "vrais" turbulents car dans ce cas  $\mu_s(x) = 0$  pour les petites valeurs de  $x$ ). Au contraire, on peut voir, sur la figure de droite, la convergence vers le comportement algébrique le plus lent pour toutes les valeurs de  $y$ .

Dès lors,  $m_X(0, y, t)$  n'est proportionnelle à la densité totale  $m + s$  à tous temps et pour toutes les valeurs de  $y$  que dans deux cas :

- $\mu_s(x) = \mu_m(x)$  : Ce cas est improbable si les sites considérés sont dynamiquement distincts (on a du mal à imaginer deux processus différents ayant exactement la même signature).

- $s(t) \propto m(t)$  : La densité de structures propagatives est esclave de la densité de sites turbulents, et on mesure correctement l'exposant  $\alpha$  à partir de la densité totale.

On considérera que le paramètre d'ordre "minimal" correspondant à la densité totale de sites turbulents ("vrais" turbulents plus structures propagatives) donne une mesure de  $\alpha$  acceptable si dans l'intervalle de temps où celui-ci est mesuré, la distribution  $\mu(x, t)$  a convergé vers une distribution unique (on dira de cette distribution qu'elle est invariante). Cette condition est suffisante et n'a normalement pas besoin d'être renforcée par la mesure de  $m_X(0, y, t)$  qui sera néanmoins utilisée à titre de garantie dans les cas litigieux.

#### Application au cas $r = 3$ du modèle MIST

La Fig. 3.25 montre les histogrammes cumulés  $\rho_t$  dans le cas  $r = 3$  et  $\epsilon = 0.35986 \simeq \epsilon_c$  aux temps  $t_{11}$ ,  $t_{12}$ ,  $t_{13}$  et  $t_{14}$ . Tous les points de l'histogramme suivent le même régime algébrique, suggérant qu'il n'y a pas d'ambiguïté dans la définition du paramètre d'ordre où l'on peut inclure tous les sites tel que  $x < 1$ . Nous avons également étudié la fonction  $m_X$  qui n'a rien révélé de particulier.

Pour  $k = 1$ , nous n'avons trouvé aucun cas où il y ait ambiguïté dans la définition du paramètre d'ordre. La raison vient probablement de l'existence de structures propagatives avec queues turbulentes véhiculant l'état turbulent. Dans ce cas, la distinction entre les "vrais" sites turbulents et les structures propagatives n'est plus fondée car les deux densités sont esclaves l'un de l'autre.

La distinction est nécessaire lorsque les structures propagatives sont "libres" et ne véhiculent pas l'état turbulent, ce qui se produit plus fréquemment lorsque  $k$  est différent de 1 car alors la contrainte  $x_{in} = x_{out} = x^*$  nous rapproche de la théorie des gaz de solitons en limitant le nombre de solitons solutions de l'Eq. 3.6.

#### Mesures d'exposants critiques

Les mesures fiables d'exposants sont coûteuses et nous ne présenterons que les plus significatives d'entre elles dans le tableau 3.5, avant de les commenter.



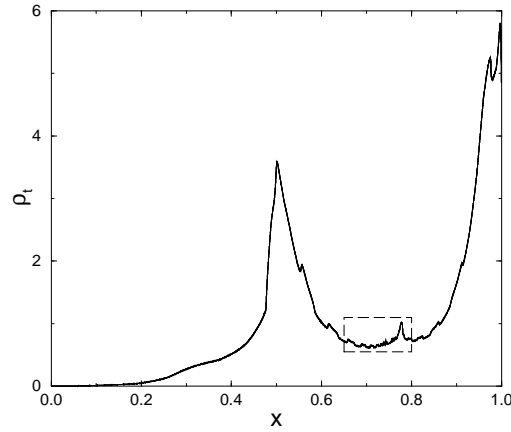


FIG. 3.25 - *Histogrammes cumulés pour le modèle MIST avec  $r = 3 \epsilon = 0.35986$  au temps  $t_{11}$ ,  $t_{12}$ ,  $t_{13}$  et  $t_{14}$  pour un réseau de  $5 \cdot 10^7$  sites en partant d'une condition initiale où tous les sites sont tirés au hasard selon une loi uniforme. Les quatre distributions cumulées et normalisées à 1 sont quasiment indiscernables (voir Fig. 3.26), et montrent que tous les points des histogrammes, suivent le même comportement algébrique, confirmant qu'il n'y a pas dans ce cas d'ambiguïté dans la définition du paramètre d'ordre.*

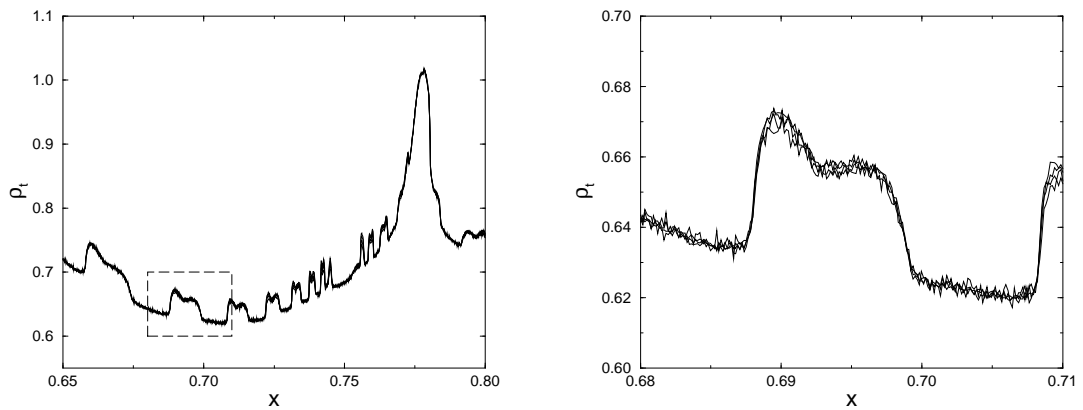


FIG. 3.26 - *Zooms successifs des histogrammes de la Fig. 3.25. La figure de gauche correspond à la zone délimitée par un cadre sur la Fig. 3.25, alors que celle de droite correspond au cadre représenté sur la figure de gauche.*

Note	Seuils		Exposants mesurés		
	$\epsilon_c$	$r_c$	$\alpha = \beta/\nu_{\parallel}$	$z = \nu_{\parallel}/\nu_{\perp}$	$\beta$
a	2/3	3.7246(1)	0.159(2)	1.58(2)	0.282(6)
	0.63	3.7456(2)	0.160(2)	-	-
	0.004684(2)	2.1	0.160(3)	-	-
b	0.35986(2)	3	0.170(10)	1.48(10)	0.30(2)
	0.16605(5)	2.8	0.165(10)	-	-
c	0.06082(2)	2.4	0.24(3)	-	-
	0.17938(1)	2.9	0.137(2)	-	-
d	0.38738(2)	3.3	0.30(2)	-	-
DP			0.1597(5)	1.580(1)	0.277(2)

TAB. 3.5 - Tableau récapitulant les principales mesures d'exposants critiques pour le modèle MIST à  $k = 1$

**a** : Ce sont trois cas où l'appartenance à la classe d'universalité de la percolation dirigée laisse peu de doute. Les deux premiers sont tels que  $\epsilon_c r_c > 2$  (temps de vie fini des structures propagatives), alors que pour le dernier,  $R$  est très petit et aucune structure propagative n'est visible sur les diagrammes spatio-temporels (voir Fig. 3.8).

**b** : La transition à  $r = 3$  est la plus étudiée bien que l'exposant  $\alpha$  soit très proche de celui de la percolation dirigée. Il existe un autre cas ambigu dont la valeur est intermédiaire. Dans ces deux cas on ne peut exclure l'appartenance à la classe d'universalité de la percolation dirigée si on se base uniquement sur les mesures d'exposants.

**c** : Ces points de transitions sont tels que les mesures excluent sans aucun doute la valeur de la percolation dirigée. Cela est possible car elles sont très éloignées de celle-ci.

**d** : Ce cas est également très éloigné de la percolation dirigée, mais le régime algébrique apparaît après un long transitoire. Cela exclut de mesurer de manière satisfaisante les autres exposants critiques.

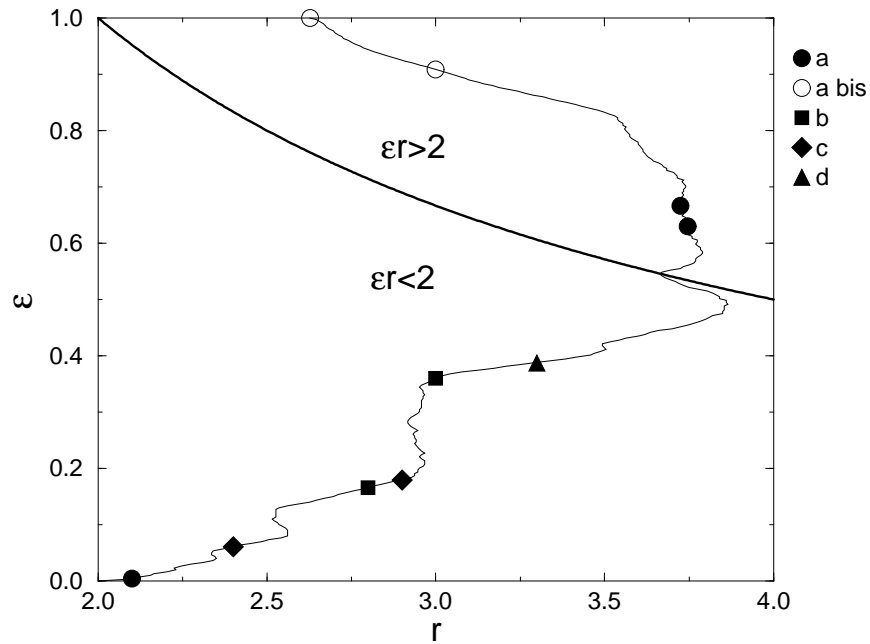


FIG. 3.27 - Diagramme de phases du modèle MIST ( $k = 1$ ) sur lequel on représente la limite de stabilité linéaire de structures propagatives de vitesse  $v = 1/1$  (ligne continue épaisse). Les ronds pleins représentent les points pour lesquels nous avons une mesure de  $\alpha$  compatible avec celle de la classe d'universalité de la percolation dirigée (cas **a** du tableau 3.5). Les ronds simples représentent les points proches de la borne supérieure qui furent initialement étudié par Houlik et al., et pour lesquels nous avons affiné l'estimation de  $\alpha$  confirmant ainsi la compatibilité avec la valeur de la percolation dirigée. Les légendes associent les symboles utilisés aux autres cas du tableau d'exposants critiques.

Dans les paragraphes consacrés à la théorie des gaz de solitons de P. Grassberger et T. Schreiber, nous avons montré qu'elle ne s'applique certainement pas au cas  $k = 1$  où le milieu laminaire est très fluctuant. Nous avons utilisé un modèle probabiliste pour démontrer que des structures propagatives purement déterministes ne véhiculant pas l'état turbulent, ne faisaient que perturber la mesure des exposants critiques, sans faire sortir le système de la classe d'universalité de la percolation dirigée. Pour nous préserver de ce problème, nous avons défini des paramètres d'ordre adéquats.

Nous avons souligné également que certaines des structures propagatives ne se contentaient pas de traverser le milieu, mais au contraire le modifiaient en profondeur en laissant derrière elles un nombre important de sites turbulents générant ainsi un grand nombre de domaines turbulents. Nous n'avons encore rien dit sur le rôle de ces structures si ce n'est qu'elles sont des vecteurs efficaces de l'état turbulent et qu'elles sont soumises à la même condition de stabilité de front que les structures composées de quelques sites, laissant derrière elles un domaine laminaire.

Cela nous donne un premier critère, nous permettant d'isoler une région de l'espace des paramètres où les structures propagatives de vitesses 1 sont linéairement instables. Pour les raisons que nous avons évoquées précédemment, le temps de vie fini de ces structures fait que l'on doit être dans la classe d'universalité de la percolation dirigée. Nous avons donc calculé l'exposant  $\alpha$  dans deux cas vérifiant la relation  $\epsilon r > 2$  (note **a** du tableau 3.5, voir également Fig. 3.27).

Dans ce deux cas les mesures corroborent l'hypothèse d'appartenance à la classe d'universalité de la percolation dirigée. Bien que leurs mesures soient approximatives, Houlrik et al.[58] avaient remarqué que les exposants critiques mesurés pour des valeurs élevées de  $\epsilon$  semblaient compatibles avec celles de la percolation.

Le troisième point de transition présentée comme appartenant à la classe d'universalité de la percolation dirigée est celui à  $r = 2.1$ . Dans ce cas, nous avons vu que le paramètre  $R$ , donnant le rapport de la longueur du domaine bloquant sur la longueur du domaine laminaire, est très petit, garantissant que les structures de vitesse 1 ne peuvent se propager efficacement. Il semble que cela soit généralisable à toutes les structures propagatives puisqu'on n'en observe aucune sur les diagrammes spatio-temporels.

Pour ce cas, l'argument généralement avancé est lié au temps de vie de l'état turbulent, dont on a vu dans l'introduction qu'il diverge lorsqu'on s'approche de 2 par des valeurs supérieures. Cet argument nous semble pertinent si l'on

cherche à comprendre pourquoi  $\epsilon_c$  tend vers 0 lorsque  $r_c$  tend vers 2. Il faut un couplage de moins en moins fort entre les sites pour les maintenir dans l'état turbulent, lorsque le temps de vie de l'état turbulent en un site isolé diverge. Mais cela est moins clair quand on doit discuter de l'existence ou de la stabilité des structures propagatives (la stabilité linéaire des structures propagatives est d'autant plus grande que  $\epsilon$  et  $r$  sont petits).

Notons par ailleurs que notre mesure contredit celle de Moriyama et al., [82] qui donnaient une valeur incompatible avec celle de la percolation dirigée. Cela souligne une fois de plus, si c'est nécessaire, les risques importants d'erreurs lors de la mesure d'exposants critiques.

Ces observations sont appuyées par des arguments analytiques justifiant cette appartenance en montrant que dans ces régions, les structures propagatives dominantes sont instables (instabilité linéaire ou à seuil). Cependant, cela suppose qu'il n'y a pas de structures propagatives autres que celles de vitesse 1, ce qui n'a rien d'évident, mais semble être le cas, donnant ainsi une vision cohérente des processus en jeu.

Nous avons maintenant des résultats quantitatifs validant partiellement la conjecture de Pomeau. En effet, ils montrent que pour un nombre important (à  $k = 1$ ) de point dans l'espace des paramètres, le modèle MIST est l'objet d'une transition continue vers un régime d'intermittence spatio-temporelle, et que ces transitions sont dans la classe d'universalité de la percolation dirigée.

A côté de cela, nous avons confirmé l'existence d'au moins deux points de transition dont les exposants sont éloignés, et en avons trouvé un troisième (notes **c** et **d** du tableau d'exposants critiques). Nous avons utilisé les paramètres d'ordre adaptés au modèle MIST et avons observé la convergence de  $\mu(x, t)$  vers une distribution invariante. Ces mesures sont donc acceptables.

Elles présentent néanmoins des difficultés techniques :

- Les structures propagatives que l'on observe dans les voisinages des points de transition à  $r = 2.4$  et  $r = 2.9$  sont de vitesse  $1/2$  ou  $1/3$  (voir Fig. 3.28). On ne sait rien analytiquement sur ces structures (par exemple on ne sait pas s'il existe un seuil de stabilité, analogue de  $x_c$ ). C'est un handicap important si on souhaite pousser plus en avant l'étude de ces cas.

- Ce n'est pas le cas pour le point à  $r = 3.3$ , mais la présence d'un transitoire long avant l'apparition du régime d'échelle empêche une mesure précise de  $\alpha$ , ou même l'estimation de  $\beta$  et  $z$  (voir Fig. 3.29).

Nous avons en fait fixé notre attention sur le même point de transition que P. Grassberger et T. Schreiber.

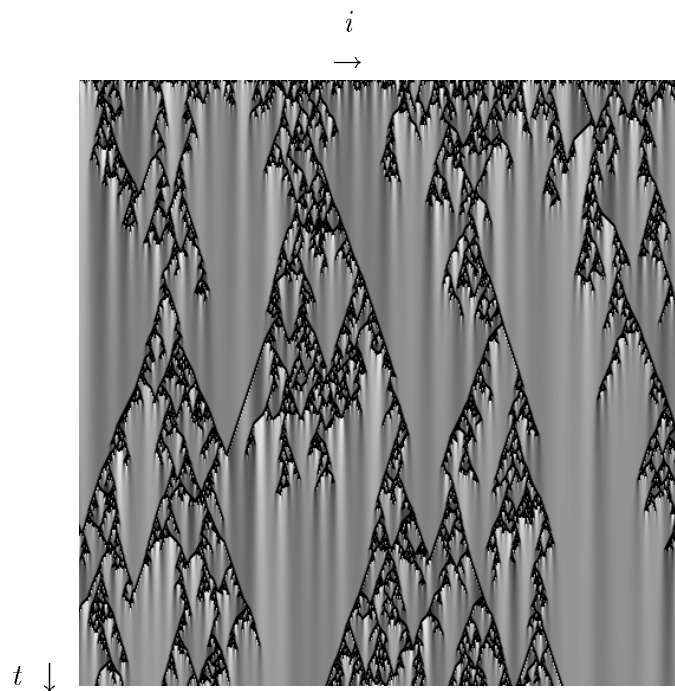


FIG. 3.28 - *Diagramme spatio-temporelle pour  $r = 2.9$  et  $\epsilon = 0.17838$ , 512 sites et itérations, au voisinage du seuil. Le code de couleur est le suivant : noir si  $x < 1$ , dégradé de gris pour  $x$  compris entre 1 (gris foncé) et 1.45 (blanc). On peut constater sur ce diagramme l'absence de structure de vitesse 1, et l'apparition d'autres solutions de vitesse  $1/2$  et  $1/3$ . Le temps croît de haut en bas*

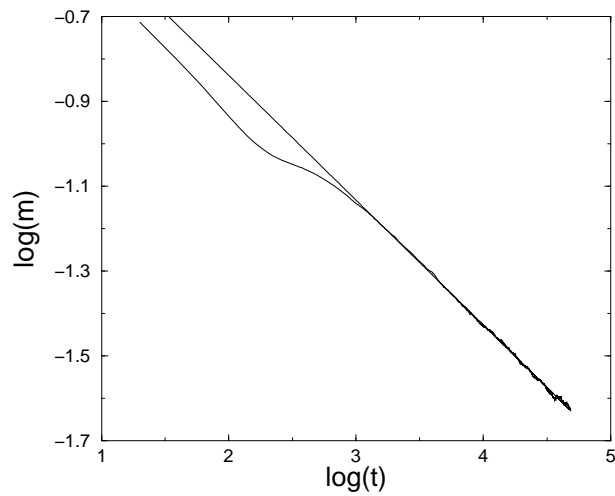


FIG. 3.29 - Densité de sites turbulents en fonction du temps pour  $r = 3.3$ ,  $\epsilon = 0.38738$  et un système de  $5 \cdot 10^7$  sites en partant d'une condition initiale où tous les sites sont turbulents. On représente également la meilleure interpolation par une loi de puissance donnant  $\alpha = 0.30(2)$ . Cette estimation est assez approximative à cause d'un transitoire assez long avant l'apparition du régime d'échelle.

Nous présentons sur la Fig. 3.30 les exposants “instantanés” pour le cas  $r = 3$ ,  $\epsilon = 0.35986$  et  $r = 3.7246$ ,  $\epsilon = 2/3$ . Le second est inclus pour faciliter la comparaison entre un cas appartenant à la classe d'universalité de la percolation dirigée et un cas qui semble ne pas y appartenir. On estime à partir de ces données que l'exposant  $\alpha$  est de l'ordre de 0.170. Cependant la différence avec la valeur de la percolation dirigée est trop faible pour pouvoir l'exclure définitivement compte tenu de la précision de l'estimation.

C'est pourquoi les barres d'erreur que nous avons mises incluent les valeurs de la percolation dirigée dans ce cas.

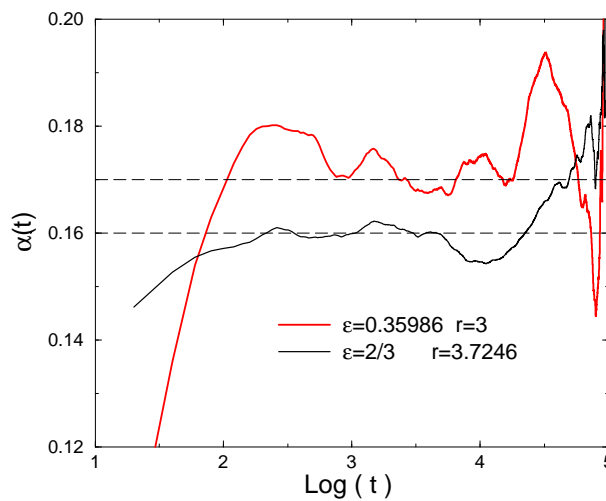


FIG. 3.30 - *Pente locale extraite de l'évolution temporelle de l'aimantation en deux seuils de transition. L'un vérifie la condition  $er > 2$  ( $\epsilon = 2/3$ ,  $r = 3.7246$ ), l'autre non ( $\epsilon = 0.35986$ ,  $r = 3$ ). Le rapport  $t'/t$  est pris égale à 6 (voir Sect. 3.5).*

### Synthèse

Dans cette première partie, nous avons travaillé dans la continuité des résultats antérieurs sur le modèle MIST, en tournant notre argumentation autour de celles déjà existantes.

Nous avons montré que toutes les structures ne sont pas équivalentes car elles ne contribuent pas toutes efficacement à la propagation de l'état turbulent. Il est préférable de ne pas inclure ces structures si on sait les différencier, ou de définir des paramètres d'ordre adaptés aux systèmes considérés.



Nous avons par ailleurs déterminé les conditions d’instabilité linéaire des structures propagatives de vitesse 1, qui restent les structures dominantes dans plus de 50% des points de transition à  $k = 1$ . Lorsque cette condition est vérifiée ( $\epsilon r > 2$ ), les structures propagatives ne peuvent véhiculer l’état turbulent au delà d’une longueur caractéristique. Dans ce cas, la propagation de l’état turbulent est à courte portée et les mesures confirment l’appartenance à la classe d’universalité de la percolation dirigée.

Reste un certain nombre de cas où les exposants critiques mesurés sont différents de ceux de la classe d’universalité de la percolation dirigée. Tous sont dans le domaine de stabilité linéaire des structures propagatives de vitesse 1.

Parmi ces points de transitions, le plus étudié reste celui à  $r_c = 3$  et  $\epsilon_c \simeq 0.35986$ . Malheureusement, les exposants sont trop proches de ceux de la classe d’universalité de la percolation pour se convaincre définitivement de l’existence d’un écart.

Il nous faut, comme pour la discussion sur la “parity conserving class” (appendice C, (Sect. 3.7)), isoler les mécanismes qui pourraient justifier cet écart.

Nous avons distingué parmi tous les types de structures, celles dites à queues turbulentes, qui ont la propriété de traverser de grandes zones laminaires non-bloquantes en laissant une densité élevée de sites turbulents derrière elles. Mais les mesures de temps vie moyen montrent que celui-ci est fini même au point de transition.

Une première hypothèse consisterait à dire que l’on est de nouveau dans un cas où la propagation de l’état turbulent est à courte portée, et que dans la limite de taille et de temps infinie, le comportement critique sera celui de la classe d’universalité de la percolation dirigée. Ce serait oublier plusieurs aspects fondamentaux pour la suite de ce travail :

Le premier concerne la disparition d’une structure propagative qui maintenant est induite par un changement significatif du milieu laminaire dans lequel elle se propage (franchissement d’un seuil). C’est donc le milieu laminaire et son organisation en régions bloquantes et non bloquantes qui contrôlent la statistique des temps de vie. Il y a une évolution *conjointe* des propriétés de propagation de l’état turbulent, des structures propagatives et des zones laminaires lorsqu’on s’approche du point de transition.

Le second est lié au caractère dégénéré de l’état absorbant dans le modèle MIST qui a été totalement négligé ou presque. Il est vrai qu’il y avait peu de raisons de penser à l’influence de celui-ci tant qu’on n’avait pas montré

l'existence d'au moins deux types de sites laminaires très différents du point de vue dynamique (les bloquants et les non bloquants).

Reste à savoir si ces différences peuvent significativement influencer les propriétés critiques au point de transition, ou si on observe un processus indépendant des mécanismes d'apparition des propriétés critiques.

Nous montrerons dans la section suivante que l'organisation des domaines laminaires en régions *bloquantes* et *non bloquantes*, et l'existence de structures propagatives à queue turbulente, ne sont en rien des processus passifs dans les mécanismes d'apparition des propriétés critiques. Ces éléments constitueront des indices convainquants, nous permettant de conclure que, dans le cas  $r = 3$ , le modèle MIST n'est probablement pas dans la classe d'universalité de la percolation dirigée.

### 3.3 Universalité et structuration des domaines laminaires

La difficulté principale du modèle MIST réside dans l'imbrication des processus gouvernant la propagation de l'état turbulent. On a vu qu'il existe un lien étroit entre la propagation des structures et l'existence de régions bloquantes au sein des domaines laminaires.

Pour guider notre étude, nous nous sommes inspirés des résultats du modèle MIST, pour construire un nouveau modèle probabiliste que nous appellerons DDP, pour "double directed percolation". Cela consistera à imposer des propriétés "critiques" au sein des domaines laminaires qui seront composées de sites bloquants et non bloquants. Nous verrons que lorsque la propagation de l'état turbulent est systématique dans les régions laminaires non bloquantes, les transitions observées ne sont plus dans la classe d'universalité de la percolation dirigée.

On dit de ces points de transitions qu'ils sont de codimension 2, car il faut fixer deux paramètres indépendants : l'un est associé aux propriétés critiques du milieu laminaire, l'autre à la détermination du point de transition.

Après avoir décrit ce modèle, nous ferons une comparaison avec les résultats du modèle MIST. Ils suggèrent qu'il y a bien au sein des domaines laminaires une structure "non triviale" influençant les propriétés de propagations de l'état turbulent. Il restera alors à comprendre comment cette structure apparaît, sachant que principalement deux scénarios très différents sont envisageables :

- Il existe des points particuliers sur la ligne de transition où les régions laminaires non bloquantes sont distribuées algébriquement. On est alors dans le schéma type du point de codimension 2 où les propriétés critiques des domaines laminaires et de la phase turbulente sont réglées indépendamment les unes des autres.
- Tous les points de transition sont tels qu'une structure non triviale se met en place "automatiquement" au sein des domaines laminaires. Il faut alors chercher les mécanismes pouvant présider à sa naissance.

Dans ces deux cas la questions de l'universalité des comportements (existence d'une classe spécifique ou variation continue des exposants) devra être abordée.

Nous aborderons ensuite une partie encore très prospective concernant les mécanismes de structuration des domaines laminaires.

### 3.3.1 Un modèle témoin de codimension 2

Après avoir décrit les règles d'évolution de cet automate cellulaire, nous en présenterons les principaux résultats, puis rentrerons dans les détails nécessaires à une comparaison quantitative avec le modèle MIST.

#### Présentation du modèle DDP

Il s'agit d'un automate cellulaire à trois états (turbulent  $t$ , laminaire non bloquant  $l$  et laminaire bloquant  $l_+$ ) et quatre paramètres sur un réseau triangulaire. L'évolution est régie par les règles résumées dans le tableau à double entrée 3.6.

	$t$	$l$	$l_+$
$t$	$c(2-c)$ $l \quad (1-c)^2/2$ $l_+ \quad (1-c)^2/2$	$p$ $l \quad (1-p)/2$ $l_+ \quad (1-p)/2$	$q$ $l \quad (1-q)/2$ $l_+ \quad (1-q)/2$
$l$	$\Leftrightarrow$ $tl$	$l$	$\Leftrightarrow$ $l_+l$
$l_+$	$\Leftrightarrow$ $tl_+$	$l \quad 1-r$ $l_+ \quad r$	$l \quad (1-r)^2$ $l_+ \quad r(2-r)$

TAB. 3.6 - Tableau récapitulatif des règles d'évolution du modèle DDP. On peut remarquer que la dynamique au sein des grandes zones laminaires composées de sites laminaires bloquants et non bloquants est exactement celle de la percolation dirigée, assurant ainsi l'émergence de propriétés critiques pour  $r = r_c^{DP}$ .

La dynamique au sein d'un domaine laminaire<sup>20</sup> est strictement copiée sur celle de la percolation dirigée. Dès lors, un système composé uniquement de sites laminaires bloquants et non bloquants présente des propriétés critiques si  $r$  est fixé à la valeur du seuil de percolation dirigée que nous considérerons égale à 0.644701.

On espère que les mêmes propriétés se développeront au sein des grands domaines laminaires, assurant ainsi l'apparition de distributions algébriques

---

20. A partir de maintenant nous réserverons le mot "domaine" aux ensembles compacts de sites laminaires sans distinguer le caractère bloquant ou non, et parlerons de régions (laminaires) bloquantes ou non bloquantes pour parler des ensembles compacts de sites d'un même type.

des tailles des régions laminaires non bloquantes. Les paramètres  $p$  et  $q$  déterminent les propriétés de propagation des sites turbulents dans les deux milieux laminaires. Reste le paramètre  $c$  qui fixe le temps de vie de l'état turbulent sur deux sites contigus et sert en général de paramètre de contrôle.

Il n'y a pas dans ce modèle d'état représentant explicitement les structures propagatives. Nous disposons uniquement des paramètres  $p$  et  $q$  et pouvons leur attribuer des valeurs très différentes, facilitant ou empêchant la propagation de l'état turbulent.

En nous inspirant du modèle MIST, on prendra  $p = 1$  pour tenir compte de la propagation systématique des structures dans un milieu non bloquant. Au contraire une valeur faible de  $q$ , reflétera le caractère bloquant du milieu  $l_+$ .

On représente sur les Fig. 3.31 et 3.32 deux diagrammes spatio-temporels typiques où l'on peut voir l'influence du paramètre  $p$  sur les propriétés de propagation de l'état turbulent au sein des régions laminaires non bloquantes. On notera tout particulièrement dans le coin supérieur droit de la Fig. 3.32, l'existence d'une "structure propagative à queue turbulente". Celle-ci traverse un grande zone laminaire en lui substituant un milieu où la densité de sites turbulents est grande.

### Diagramme de phases

Nous allons maintenant décrire en quelques points le diagramme de phases de ce modèle, dont la présentation systématique n'a pas d'intérêt dans le cadre de ce travail.

On peut tout d'abord remarquer que lorsque  $r > r_c^{DP}$ , les sites laminaires bloquants percolent au travers des domaines laminaires. Même si les sites turbulents se propagent systématiquement ( $p = 1$ ) dans les régions laminaires non bloquantes, ils ne le font que sur des longueurs finies distribuées exponentiellement.

Les structures propagatives sont dans ce cas des vecteurs efficaces de l'état turbulent mais à *courte portée*. Il est donc logique de retrouver un comportement critique identique à celui de la classe d'universalité de la percolation dirigée (voir Fig. 3.33).

Pour les valeurs de  $r < r_c^{DP}$ , nous avons observé différents régimes allant des transitions continues appartenant à la classe d'universalité de la percolation dirigée, aux comportements de type champ moyen. Ceux-ci ne nous ont pas éclairés sur les spécificités du modèle MIST et nous n'insisterons pas sur cette région de l'espace des paramètres.

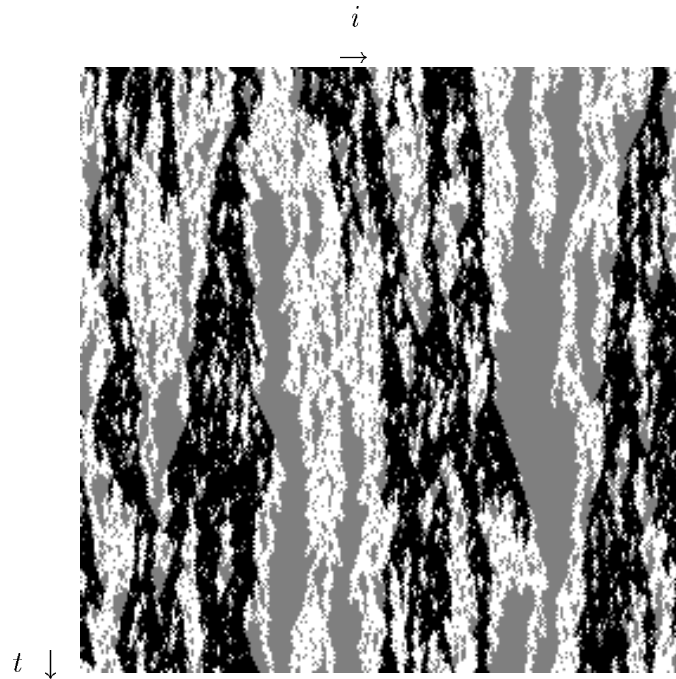


FIG. 3.31 - *Evolution spatio-temporelle du modèle témoin pour un réseau de 256 sites et 256 itérations. Les paramètres sont  $c = 0.7707$ ,  $p = 0.8$ ,  $q = 0.4$  et  $r = 0.644701 \simeq r_c^{DP}$ . Les sites laminaire bloquants sont en blanc, les sites laminaires non bloquants en gris et les sites turbulents en noir. Le temps croît de haut en bas.*

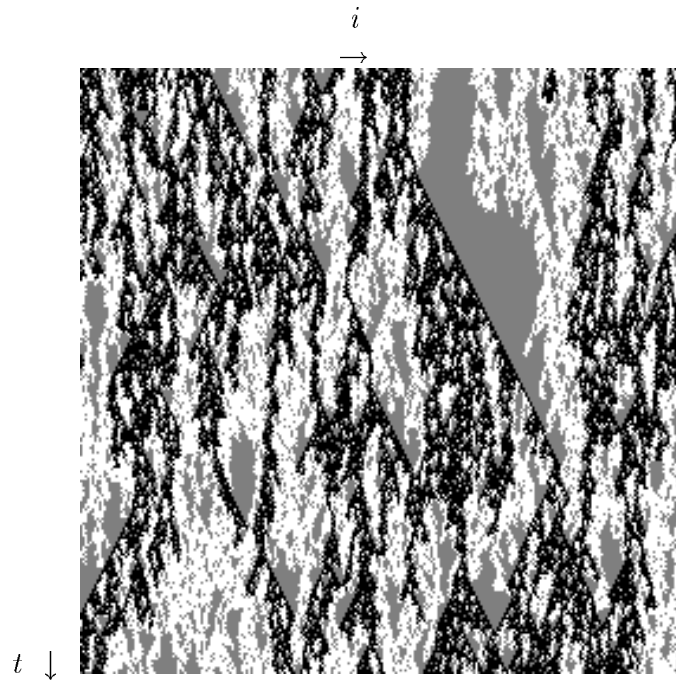


FIG. 3.32 - *Représentation identique à celle de la Fig. 3.31 pour  $c = 0.468$ ,  $q = 0.4$ ,  $r = 0.644701 \simeq r_c^{DP}$  et  $p = 1$ . Dans ce cas, la propagation de l'état turbulent dans les régions non bloquantes est systématique.*

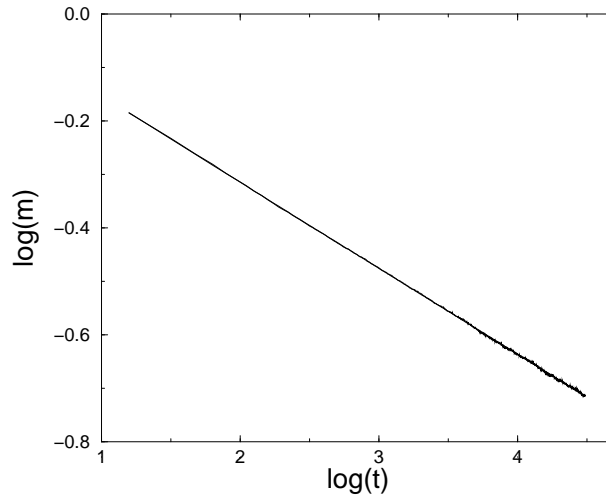


FIG. 3.33 - Densité de sites turbulents en fonction du temps pour le modèle DDP avec  $p = 1$ ,  $q = 0.4$ ,  $r = 0.7$  et  $c = 0.6230 \simeq c_c$  et un système de  $3 \cdot 10^6$  sites. On superpose le résultat de l'interpolation par une loi de puissance qui est quasiment indiscernable sur 3 décades, et aboutit à l'estimation de  $\alpha = 0.160(2)$ .

Le régime le plus intéressant pour la suite de l'étude concerne le cas  $r = r_c^{DP}$ . Il n'est a priori pas nécessaire d'avoir des structures propagatives de durée de vie infinie ( $p = 1$ ) pour sortir de la classe d'universalité de la percolation dirigée si nous imposons des propriétés critiques au sein des domaines laminaires.

Mais comme on peut le voir sur la Fig. 3.34, la mesure de  $\alpha \simeq 0.162(4)$ <sup>21</sup>, suggère que pour ces valeurs de paramètres, et pour toutes les valeurs de  $p \neq 1$ , le système est bien dans la classe d'universalité de la percolation dirigée.

La raison est probablement que l'absence de structures se propageant systématiquement ne permet pas à l'état turbulent de pénétrer assez rapidement dans les domaines laminaires au sein desquelles les plus grandes régions non bloquantes existent.

Cet argumentation demanderait à être vérifiée, par exemple en mettant d'autres comportements critiques dans la dynamique bloquante-non bloquante, gouvernés par des exposants critiques différents.

Indépendamment de l'intérêt que ce modèle a pour notre étude, ce cas montre une fois de plus la robustesse de la classe d'universalité de la percolation

<sup>21</sup>. Qui demanderait à être confirmée par la mesure d'autres exposants critiques.

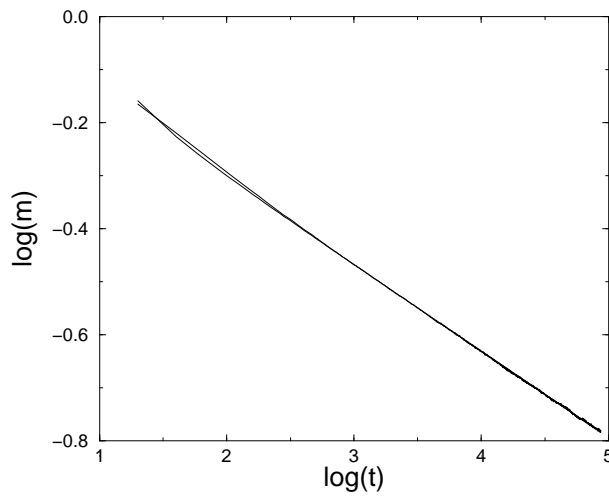


FIG. 3.34 - Densité de sites turbulents en fonction du temps pour le modèle témoin avec  $p = 0.8$ ,  $q = 0.4$ ,  $r = 0.644701 \simeq r_c^{DP}$ ,  $c = 0.7708 \simeq c_c$  et  $L = 5 \cdot 10^6$ . On superpose le résultat de l'interpolation par une loi de puissance qui est quasiment indiscernable sur 2 décades, et aboutit à l'estimation de  $\alpha = 0.162(4)$ , laissant peu de doute quant à l'appartenance à la classe d'universalité de la percolation dirigée.



dirigée.

Lorsque la propagation est systématique  $p = 1$ , tout en conservant  $r = r_c^{DP}$  et pour au moins toutes les valeurs de  $q$  comprises entre 0 et 0.4 la situation est radicalement différente. On mesure aux différents points critiques une valeur de  $\alpha$  de l'ordre de 0.217(20), facilement discernable de celle de la percolation dirigée. On montre sur la Fig. 3.35 l'évolution temporelle de la densité de sites turbulents pour un de ces seuils.

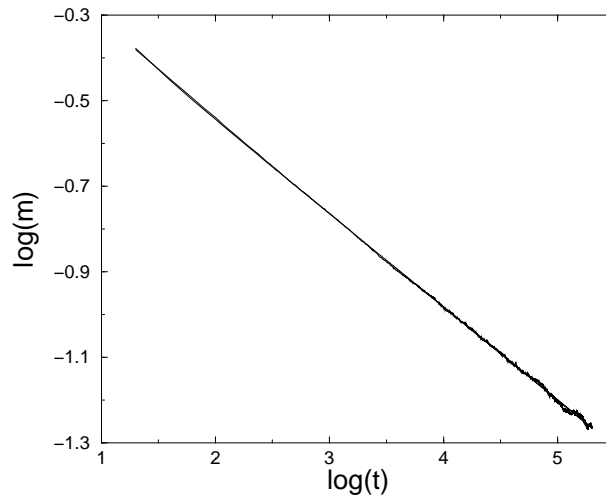


FIG. 3.35 - Densité de sites turbulents en fonction du temps pour le modèle DDP avec  $p = 1$ ,  $q = 0.4$ ,  $r = 0.644701 \simeq r_c^{DP}, c = 0.4686 \simeq c_c$  et  $L = 10^7$ . On superpose le résultat de l'interpolation par une loi de puissance qui est quasiment indiscernable sur trois décades, et aboutit à l'estimation de  $\alpha = 0.217(20)$ , démontrant sans ambiguïté que dans ce cas le système n'appartient pas à la classe d'universalité de la percolation dirigée.

L'étude de ce modèle montre qu'il faut qu'un certain nombre de conditions soient simultanément réunies pour que ce type de systèmes sorte de la classe d'universalité de la percolation dirigée. Elles sont au nombre de trois :

- Il existe des structures propagatives se propageant systématiquement dans un milieu laminaire non bloquant.
- Ce sont des vecteurs efficaces de l'état turbulent dans le sens où elles provoquent une augmentation importante de la densité de sites turbulents sur leur passage.

- Les régions bloquantes sont distribuées de sorte que les tailles des régions non bloquantes soient distribuées algébriquement au sein d'un domaine laminaire.

On peut, à ce point, poser explicitement la question du lien existant entre l'exposant gouvernant la distribution des tailles des régions laminaires non bloquantes, et la valeur de  $\alpha$ . A défaut d'arguments théoriques, il faudra pour y répondre effectuer des simulations en changeant les propriétés critiques des états laminaires. Nous laissons ce point en suspens, et revenons au cas présent.

#### Etude du cas $p = 1$ et $r = r_c^{DP}$

Nous allons étudier ce cas dans le détail, afin d'obtenir les éléments nécessaires à une comparaison avec le modèle MIST.

La première question concerne les propriétés "critiques" du milieu laminaire. Elles se traduisent par une distribution algébrique des tailles des régions non bloquantes au sein d'un grand domaine laminaire. On a effectivement réglé le paramètre  $r$  au seuil de la transition apparaissant dans la percolation dirigée. Cependant, la géométrie est maintenant légèrement différente puisqu'il peut y avoir des effets de bords. Ceux-ci ne sont pas négligeables comme cela a été montré par ailleurs [70, 40]. Nous devons donc vérifier les caractéristiques de ces distributions.

On veut montrer qu'une distribution "critique" existe dans chaque domaine laminaire. Nous notons  $\eta(l, L)$  (resp.  $\eta_+(l, L)$ ) la probabilité d'avoir une région laminaire non bloquante (resp. bloquante) de taille  $l$  dans un domaine laminaire de taille<sup>22</sup>  $L$ .

La dépendance de ces distributions en fonction de  $L$  n'est pas inutile car lorsqu'on fait une mesure au seuil d'une transition, on se contente en général de faire les histogrammes des longueurs de toutes les régions bloquantes et non bloquantes qui existent à un temps donné dans le système. Dans le cas où les domaines laminaires seraient essentiellement composés d'une grande région laminaire bloquante ou non bloquante, les histogrammes montreraient une queue algébrique. Celle-ci ne serait que le reflet de la distribution des tailles des domaines laminaires, et masquerait le fait que les domaines laminaires sont essentiellement homogènes.

Cependant pour améliorer un peu la statistique, on cumule les histogrammes

---

<sup>22</sup>. A ne pas confondre avec la taille du système, pour laquelle nous avons utilisé la même notation.

en les sommant sur un intervalle *fini* de  $L$ , mais aussi en regardant plutôt la probabilité d'avoir une région de taille supérieure à  $l$ . Ces quantités, reliées à la fonction de répartition, sont données par la somme de  $l$  à l'infini des distributions de probabilité  $\eta$  et  $\eta_+$ , c'est à dire

$$N(l, L_1, L_2) = \sum_{L=L_1}^{L_2} \sum_{l'=l}^{\infty} \eta(l', L) \quad (3.25)$$

La Fig. 3.36 montre les histogrammes intégrés et cumulés en découpant l'intervalle des longueurs  $L$  de 1 à 100, de 100 à 500, de 500 à 2500, de 2500 à 12500, et pour toutes valeurs supérieures à 12500. Cette mesure a été faite sur l'état final associé à la simulation présentée dans la Fig. 3.35.

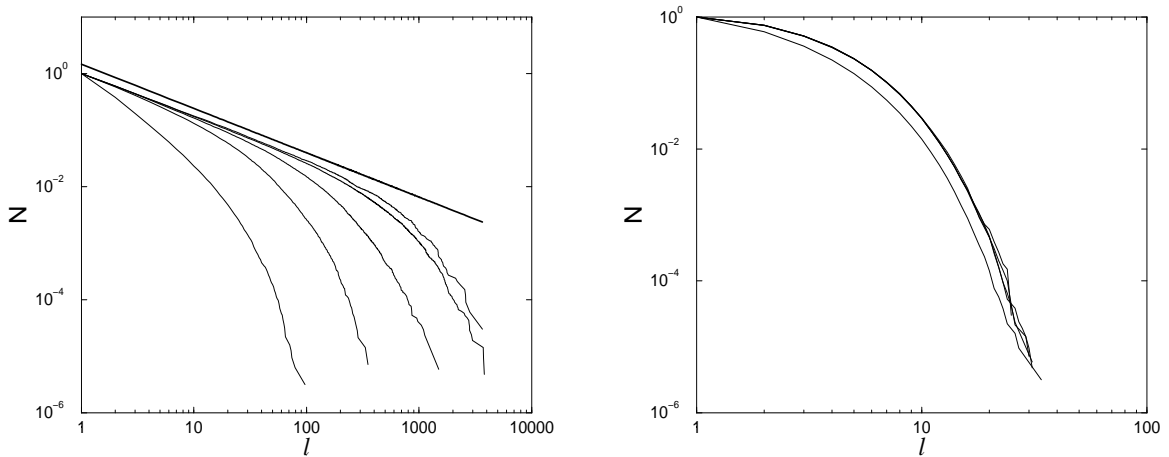


FIG. 3.36 - Histogrammes conditionnés et intégrés (définis dans le texte) des longueurs des régions non bloquantes (gauche) et bloquantes (droite). Ces statistiques sont faites sur l'état final de la simulation dont la densité de sites turbulents en fonction du temps est présentée dans la Fig. 3.35. Les longueurs de cumul sont 100, 500, 2500, 12500. On peut voir la convergence vers une distribution algébrique pour les régions non bloquantes et une distribution exponentielle pour les régions bloquantes. L'exposant pour la distribution non intégrée est de l'ordre de 1.78, valeur proche de celle de la percolation dirigée ( $\sim 1.75$ ), montrant que les grands domaines laminaires ont une structure interne fractale.

Les 5 histogrammes montrent que les distributions de probabilité des tailles

des régions non bloquantes au sein des domaines laminaires se composent de deux parties distinctes. La première correspond à une coupure exponentielle liée à la taille des domaines laminaires que l'on a considérés : on ne peut pas avoir de régions non bloquantes plus grandes que le domaine laminaire qui les contient. Puis une partie algébrique vers laquelle toutes les distributions convergent lorsque la taille des régions est petite devant la taille du domaine considéré.

L'exposant associé à cette loi algébrique est relié à la dimension fractale de l'ensemble des sites bloquants au sein d'un domaine laminaire. On trouve une pente de l'ordre de 1.78 proche de la valeur de la percolation dirigée 1.747 . Les incertitudes numériques ne nous permettent pas de conclure quand à l'égalité ou non de ces deux valeurs.

La valeur exacte présente peu d'intérêt du moment que la distribution des tailles des régions laminaires non bloquantes est algébrique, assurant l'existence de fluctuations importantes à tous temps dans le régime d'échelle.

Dans le même temps, les histogrammes des régions bloquantes ont convergé vers une distribution avec une coupure exponentielle indépendante de la taille du domaine laminaire dans laquelle elles se trouvent. Cela est bien connu dans les modèles de percolation dirigée et est lié à la probabilité finie que deux sites bloquants contigus donnent naissance à un site non bloquant, provoquant ainsi la segmentation de la région considérée. Il ne peut pas y avoir de très grandes régions bloquantes. La taille typique des régions laminaires bloquantes reste de l'ordre de quelques sites.

### Temps de vie des structures propagatives

Le dernier point à aborder concerne la statistique des temps de vie des structures propagatives. C'est, rappelons le, un des points longuement discutés par P. Grassberger et T. Schreiber [50] pour le modèle de MIST dans le cas  $r = 3$  et  $\epsilon_c \simeq 0.35986$ .

Ils ont montré que ces temps de vie sont distribués algébriquement mais avec un exposant élevé de l'ordre de 3.7, signifiant que ces structures ont un temps de vie moyen fini. La question est alors de savoir qui du temps de vie fini ou du comportement algébrique de la distribution, est le plus significatif.

Nous avons donc mesuré la statistique des temps de vie des structures propagatives pour le modèle DDP. Par structures propagatives ou solitons nous entendons un alignement de sites turbulents avec une vitesse plus ou moins 1 dans une représentation spatio-temporelle . Là encore les distributions sont cumulées en temps pour améliorer la statistique. Nous représentons ces

histogrammes sur la Fig. 3.37. Nous avons fait la même statistique sur le modèle MIST à  $r = 3$ , afin de faciliter la comparaison (Fig. 3.38).

On observe, dans les deux cas, la convergence de ces distributions en fonction du temps, le comportement à temps long étant algébrique avec un exposant de l'ordre de 3.4(2) pour le modèle DDP et 3.55(5) pour le modèle MIST.

Nous ne disons pas que ces exposants sont identiques, mais seulement que ces comportements algébriques sont dans les deux cas, le reflet du couplage fort qui existe entre la distribution des temps de vie des structures propagatives, les propriétés de propagation de l'état turbulent, et la structure bloquante - non bloquante des domaines laminaires.

Pour reprendre l'argumentation de P. Grassberger et T. Schreiber sur le modèle MIST, nous dirons que le temps de vie moyen de structures propagatives mesuré au seuil d'une transition, n'est pas une mesure déterminante pour conclure que la propagation de l'état turbulent est à courte portée.

Ces similitudes relancent complètement la discussion relative à l'appartenance du modèle MIST à la classe d'universalité de la percolation dirigée, dans la mesure où les structures propagatives jouent apparemment un rôle identique dans le modèle DDP et dans le cas  $r_c = 3$ ,  $\epsilon_c \simeq 0.35986$  du modèle MIST.

Cette analogie a cependant une limite importante qui est liée à la codimension égale à 2 du point de transition du modèle DDP. En effet, même si nous avons vraisemblablement isolé le mécanisme dominant de propagation de l'état turbulent, nous n'avons pour l'instant rien dit des mécanismes pouvant être à l'origine d'une structure non triviale au sein des domaines laminaires pour le modèle MIST.

C'est à ce point de la discussion que l'on suppose l'existence de deux scénarios distincts, pouvant se produire pour le modèle MIST :

- (1) Les points de transition n'appartenant pas à la classe d'universalité de la percolation dirigée sont toujours des points de codimension 2. Dans ce cas, les propriétés "critiques" des domaines laminaires n'apparaissent qu'en certains points singuliers de la ligne de transition.
- (2) Il existe un mécanisme faisant coïncider systématiquement l'existence d'un point de transition avec des propriétés non triviales au sein des domaines laminaires.

Pour distinguer ces deux cas, il faut étudier la structure des domaines laminaires. Nous allons procéder par étapes en montrant tout d'abord que les domaines laminaires sont toujours composés de régions bloquantes et non

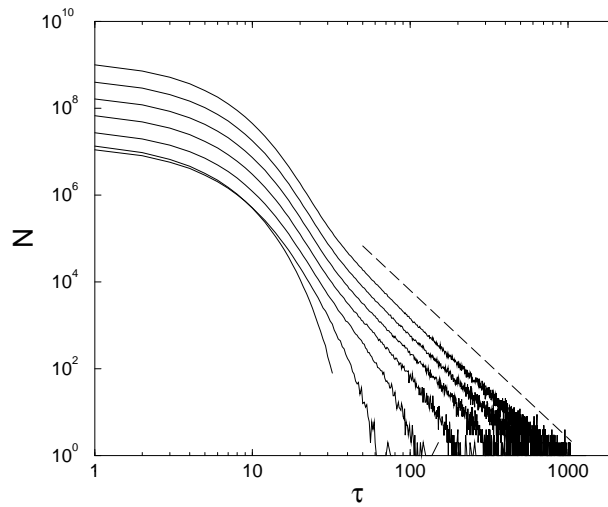


FIG. 3.37 - Distributions cumulées des temps de vie des structures propagatives au seuil de la transition sur le point de codimension 2 pour  $p = 1$ ,  $q = 0.4$ ,  $r = 0.644701 \simeq r_c^{DP}$ ,  $c = 0.4686 \simeq c_c$  et  $L = 5 \cdot 10^6$ , aux temps  $t_1, t_3, t_5, t_7, t_9, t_{11}$  et  $t_{13}$ . L'exposant de la loi de puissance apparaissant sur une décade est de l'ordre de 3.4(2).

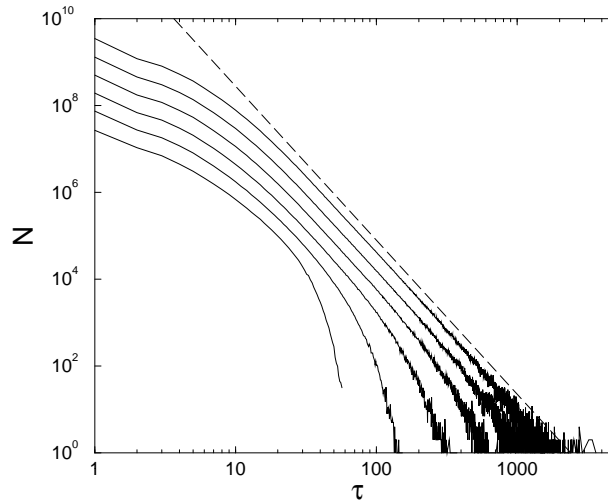


FIG. 3.38 - Distributions cumulées des temps de vie des structures propagatives au seuil de la transition sur le point de transition  $r = 3$  et  $\epsilon_c = 0.35986(2)$  du modèle MIST, aux temps  $t_2, t_4, t_6, t_8, t_{10}$  et  $t_{12}$  pour un système de  $10^7$  sites. L'exposant de la loi de puissance apparaissant sur une décade est de l'ordre de 3.55(5). Cette valeur est légèrement différente de celle de P. Grassberger et T. Schreiber.

bloquantes. Puis nous montrerons comment les structures propagatives à queue *non* turbulente jouent un rôle déterminant dans le maintien de cette structure complexe.

### 3.3.2 Existence d'une distribution laminaire asymptotique

On a vu dans la section consacrée à la définition du paramètre d'ordre, que la distribution des sites turbulents converge durant le régime d'échelle vers une distribution invariante. Une généralisation possible à tout le domaine des  $x$  consiste à dire que la distribution instantanée est de la forme

$$\mu(x, t) = A(x) + B(x)t^{-\alpha}$$

avec  $A(x) = 0, \forall x \in [0, 1]$ .

Cela est en fait suggéré par le comportement de la valeur moyenne instantanée de  $x$ ,  $\langle x_i^t \rangle = 1/L \sum_i x_i^t$ , dont on a constaté qu'elle dépendait linéairement de la densité de sites turbulents à tous temps pris dans le régime d'échelle.

$A$  est, par définition, la distribution vers laquelle  $\mu$  tend dans la limite des tailles et des temps infinis au seuil de la transition. C'est la distribution du milieu laminaire laissé par la mort de la phase turbulente.

$B$  n'est pas une distribution car il existe toujours des valeurs de  $x$  pour lesquelles  $B(x) < 0$ . Pour s'en convaincre il suffit d'utiliser la condition de normalisation de  $\mu$  et de  $A$ , et dès lors  $\int_0^1 B(x)dx = 0$ . En fait  $B$  est la différence de deux distributions normalisées que l'on note  $\eta$  et  $\gamma$ , dont la somme pondérée par des coefficients dépendants du temps est égale à  $\mu$ .

$$\begin{aligned} \mu(x, t) &= \eta(x)a(t) + \gamma(x)b(t) \\ &= (\eta(x) - \gamma(x))a(t) + \gamma(x) \end{aligned} \quad (3.26)$$

où la condition de normalisation  $a(t) + b(t) = 1$  a été utilisée. En prenant  $a(t) = ct^{-\alpha}$ , on identifie  $\gamma$  à  $A$  et  $c(\eta - \gamma)$  à  $B$ .

Nous décrivons maintenant la méthode utilisée pour extraire la distribution  $\gamma$  à partir des distributions instantanées cumulées

$$U(x, t_i) = \sum_{t=t_{i-1}}^{t_i} \mu(x, t) \quad ,$$

que nous avons déjà définie dans la Sect. 3.2.3.

On intègre l'Eq. 3.26 entre  $t_{i-1}$  et  $t_i$  pour obtenir

$$U(x, t_i) = \chi(x)t_i^{1-\alpha} + \gamma(x)t_i(1 - q) \quad , \quad (3.27)$$

où

$$\chi(x) = c \frac{1 - q^{1-\alpha}}{1 - \alpha} (\eta(x) - \gamma(x))$$

et  $q = t_i/t_{i-1} = 10^{0.25}$ .

A  $x$  fixé et connaissant deux valeurs successives de  $U(x, t_i)$ ,  $\chi(x)$  et  $\gamma(x)$  sont les solutions uniques d'un système d'équations linéaires à deux inconnues à paramètres constants. On représente sur la Fig. 3.39 les distributions  $\gamma(x)$  obtenues à partir de  $U(x, t_i)$  au temps  $t_i = t_{11}, t_{12}, t_{13}, t_{14}$ , ainsi que la moyenne des trois en chaque  $x$ .

Par ailleurs, nous connaissons  $\chi(x)$ , mais cela ne nous permet pas d'obtenir l'expression de  $\eta$  là où  $\gamma(x)$  est différente de 0. Il faudrait faire des hypothèses supplémentaires sur  $\eta$ , par exemple concernant les propriétés de continuité ou de dérivabilité. Nous nous contenterons de noter que partout où  $\gamma(x) = 0$ ,  $\eta(x)$  est simplement proportionnelle à  $\mu(x, t)/t^{-\alpha}$ , c'est à dire proportionnelle à  $\rho_t$  (voir sect. 3.2.3).

### Discussion

La distribution  $\gamma$  est très semblable à celle que P. Grassberger et T. Schreiber [50] ont obtenue dans les "domaines laminaires profonds"<sup>23</sup>. Cela est cohérent avec notre définition de  $\gamma$  en tant que distribution asymptotique caractéristique de l'état où il n'y a plus que des domaines laminaires, séparés par des sites turbulents dont la densité est nulle.

L'existence d'une distribution laminaire asymptotique différente de zéro sur un intervalle fini du domaine de définition, est un résultat assez surprenant. La vision que nous avons des grands domaines laminaires était plutôt celle de grandes zones du système relaxant localement vers un milieu uniforme sous l'action du couplage diffusif. La question est alors de savoir s'il est possible de concilier l'existence à tous temps de fluctuations dans les valeurs prises par les sites laminaires composant les domaines laminaires, et la relaxation vers un milieu uniforme.

Il y a deux cas possibles dont un seul est compatible avec cette vision :

---

23. Par domaine laminaire profond, il faut comprendre domaine laminaire de grande taille dont on a retiré les bords.



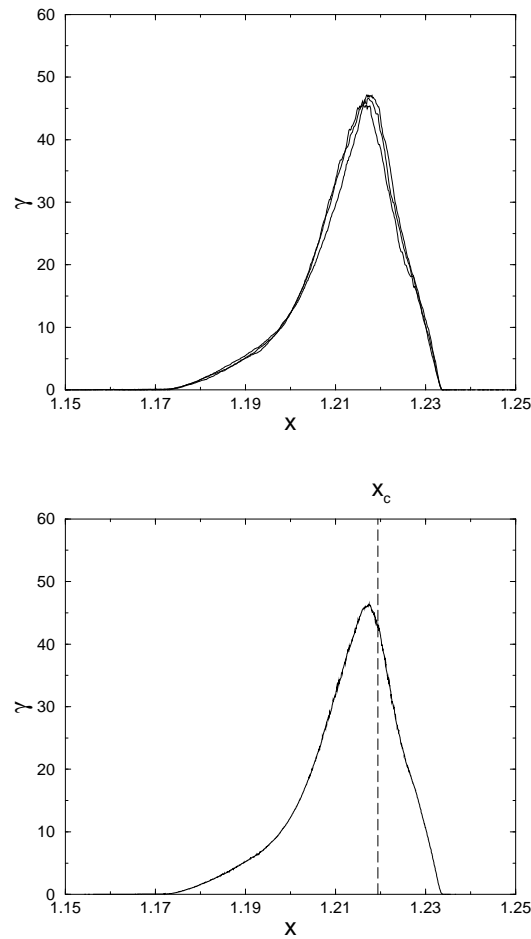


FIG. 3.39 - Distributions asymptotiques  $\gamma(x)$  extraites à partir des temps  $t_{11}$ ,  $t_{12}$ ,  $t_{13}$  et  $t_{14}$  (figure du haut) et moyenne des trois (figure du bas), pour  $r = 3$ ,  $\epsilon = 0.35986 \simeq \epsilon_c$ ,  $L = 5 \cdot 10^7$ .

- Les fluctuations des valeurs prises au sein d'un domaine laminaire, sont faibles par rapport à l'écart type de la distribution  $\gamma$ . Dans ce cas, les domaines laminaires sont essentiellement uniformes, mais les valeurs moyennes prises dans chaque domaine, sont distribuées selon  $\gamma$ .

- La distribution  $\gamma$  est bien celle des valeurs prises par la variable locale dans chacun des domaines. Dans ce cas, les domaines laminaires ne sont pas uniformes, et l'amplitude des fluctuations au sein d'un grand domaine est donnée par l'écart type de  $\gamma$ .

Nous allons montrer que la deuxième hypothèse est la bonne.

On représente sur la Fig. 3.40, les profils des deux plus grandes zones laminaires de taille 38925 et 33835, au temps  $t_{14}$  pour  $r = 3$ ,  $\epsilon = 0.35986$  et  $L = 5 \cdot 10^7$ .

On constate que ces grands domaines laminaires sont composées de régions bloquantes et non bloquantes. Par ailleurs, on représente les histogrammes des valeurs prises par  $x$  dans ces deux domaines, tout en superposant au mieux la distribution  $\gamma$  (Fig. 3.41).

L'accord est suffisant pour abandonner définitivement la vision que nous avons de domaines laminaires relaxant vers un milieu uniforme. Les domaines laminaires sont hétérogènes et composés de régions bloquantes et non bloquantes, même dans les très grands domaines.

### Aparté

L'existence d'un état laminaire hétérogène privilégié, révèle une fois de plus toute la spécificité et la complexité du modèle MIST. Nous avons déjà vu des exemples de modèles probabilistes, tel que le modèle *laminaire-turbulent-soliton I*, où il existe un état laminaire privilégié laissé par la mort de la phase turbulente. Dans ces modèles, les états privilégiés sont également des états absorbants. Dans le cas du modèle MIST, l'état laminaire privilégié n'est pas uniforme, et n'est donc pas un état absorbant. Après la mort de la phase turbulente, on observe obligatoirement un régime de relaxation vers un état uniforme, déterminé par la valeur moyenne de  $x$ , c'est à dire  $\int_1^{r/2} x\gamma(x)dx$ .

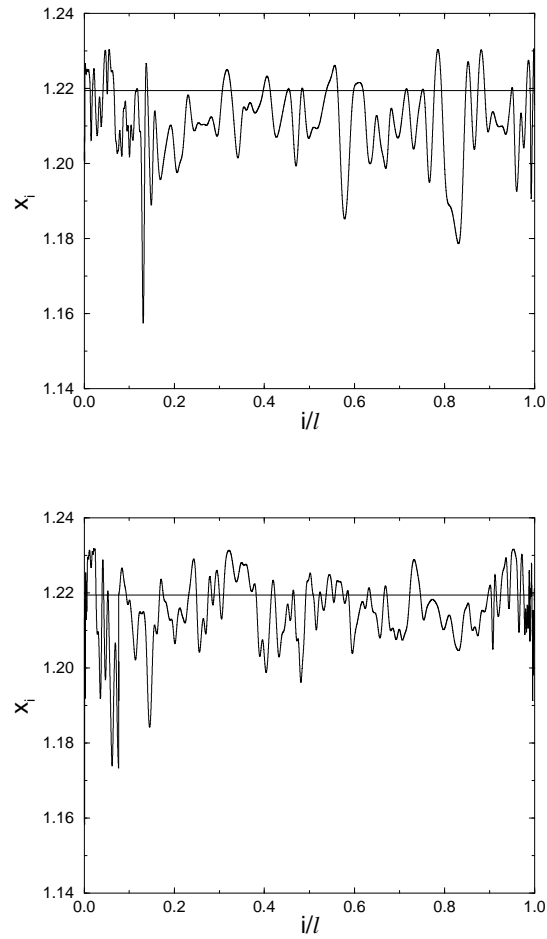


FIG. 3.40 - Profil des deux plus grandes zones laminaires de taille  $l = 38925$  et  $l = 33835$ , au temps  $t_{14}$  pour  $r = 3$ ,  $\epsilon = 0.35986$  et  $L = 5 \cdot 10^7$ . On a ajouté la valeur de blocage afin de montrer l'existence de régions bloquantes et non bloquantes.

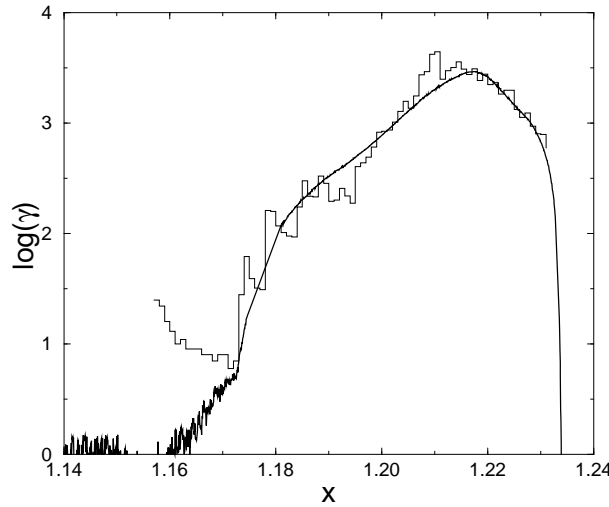


FIG. 3.41 - *Comparaison entre la distribution asymptotique laminaire  $\gamma$  et les histogrammes instantanés des deux plus grands domaines laminaires (Fig. 3.40).*

### 3.3.3 Structures au sein des zones laminaires

Nous venons de voir qu'il existe une distribution  $\gamma$  caractéristique des valeurs prises par la variable locale dans les domaines laminaires. Cette distribution est non nulle pour des valeurs du domaine de définition, de part et d'autre de la valeur de blocage  $x_c$  (Fig. 3.39). Cela signifie que tous les domaines laminaires sont composés de régions bloquantes et non bloquantes, comme le confirment les profils instantanés de la Fig. 3.40.

Nous allons montrer que l'organisation en régions bloquantes et non bloquantes des domaines laminaires à pour principale origine, la propagation des structures propagatives contenant deux sites turbulents (voir Fig. 3.14).

#### Trace visible du rôle des structures propagatives

Nous revenons maintenant sur les caractéristiques des fonctions  $\gamma$  et  $\eta$ . On représente sur la Fig. 3.42, la distribution  $\gamma$ . Il existe deux valeurs de coupure (notées  $x_\gamma^-$  et  $x_\gamma^+$ ) définissant un intervalle en dehors duquel  $\gamma(x) \simeq 0$ , relativement au niveau du bruit.

Ces valeurs de coupure sont très précisément les bornes du domaine laissé invariant par l'application qui à  $x_{in}$  associe  $x_{out}$  (voir Fig. 3.43). Il s'agit d'un zoom de l'application représentée sur la Fig. 3.14 pour les solitons à deux

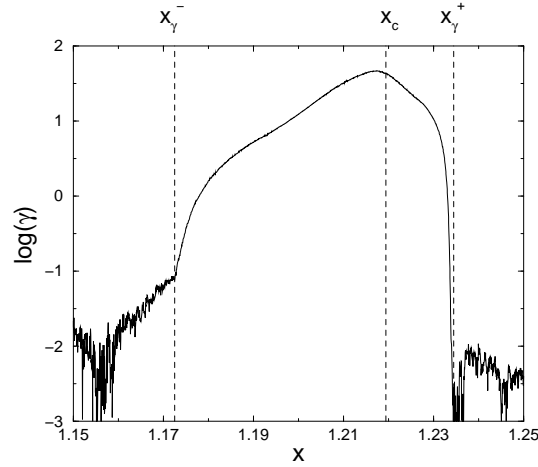


FIG. 3.42 - Distribution  $\gamma(x)$  pour  $r = 3$  et  $\epsilon = 0.35986$ . Les deux lignes verticales en tiret marquent les coupures associées aux propriétés des structures propagatives  $x_\gamma^+$  et  $x_\gamma^-$ , et la valeur de blocage  $x_c$ .

sites turbulents. Compte tenu de l'erreur sur  $\epsilon_c$ , on a  $x_\gamma^- = 1.1730(1)$  et  $x_\gamma^+ = 1.234(1)$ .

Puisque nous sommes capables de relier les points singuliers de la distribution  $\gamma$  aux propriétés des structures propagatives, c'est qu'elles sont présentes à tous temps dans le régime d'échelle. On peut remarquer sur le diagramme spatio-temporel de la Fig. 3.15, que les domaines laminaires sont parcourus par des "vagues" successives de structures propagatives laissant derrière elles des régions bloquantes et non bloquantes. Si la région située sur le bord du domaine est non bloquante, une autre structure peut s'y propager, et ainsi de suite. Nous avons représenté synthétiquement ce processus sur la Fig. 3.44.

On y voit comment la succession de structures propagatives correspond en chaque site à l'application qui à  $x_{in}$  associe  $x_{out}$ . Rappelons que les structures propagatives suivent localement les familles de solitons, expliquant ainsi leur rôle déterminant. Les transformations successives provoquent la décroissance de la densité des sites n'appartenant pas à l'intervalle laissé invariant par cette application.

On peut également trouver la marque des structures propagatives dans la distribution  $\eta$ . Les "bosses", visibles dans la région des  $x$  turbulents, sont identifiables au domaines des sites turbulents composants les solitons. Par exemple, on montre sur la Fig. 3.45 que l'un des points où la distribution  $\eta$  n'est pas dérivable, correspond très exactement à la borne inférieure du domaine de

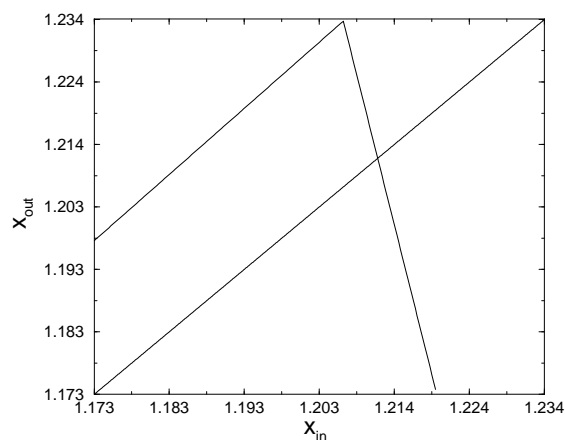


FIG. 3.43 - Application qui à  $x_{in}$  associe  $x_{out}$  dans l'intervalle laissé invariant, pour les structures propagatives composées de deux sites turbulents à  $r = 3$ ,  $\epsilon = 0.35986$ . Les bornes de cet intervalle sont notées  $x_{\gamma}^- \simeq 1.173$  et  $x_{\gamma}^+ \simeq 1.234$ .

définition du deuxième site turbulent composant les solitons à deux sites turbulents.

Les autres bosses apparaissant sur la distribution peuvent aussi pour certaines être reliées à d'autres types de solitons, confirmant l'existence de plusieurs types de structures présentes à tous temps dans le système.

L'étude des distributions a montré que les domaines laminaires étaient hétérogènes à tous temps et organisés en régions bloquantes et non bloquantes. En raison du lien étroit existant entre les propriétés des structures propagatives et les points singuliers des distributions, nous avons émis l'hypothèse selon laquelle les structures propagatives à queue non turbulente seraient à l'origine de l'apparition et du maintien d'une structure hétérogène au sein des domaines laminaires.

L'étude du modèle DDP, nous a montré par ailleurs qu'il fallait que les zones non bloquantes soient distribuées algébriquement pour influencer significativement les propriétés de propagation de l'état turbulent et les propriétés critiques au point de transition.

### Statistique des tailles des régions bloquantes - non bloquantes

Sachant que les domaines laminaires sont hétérogènes et structurés en régions bloquantes et non bloquantes, nous pouvons, comme dans le modèle

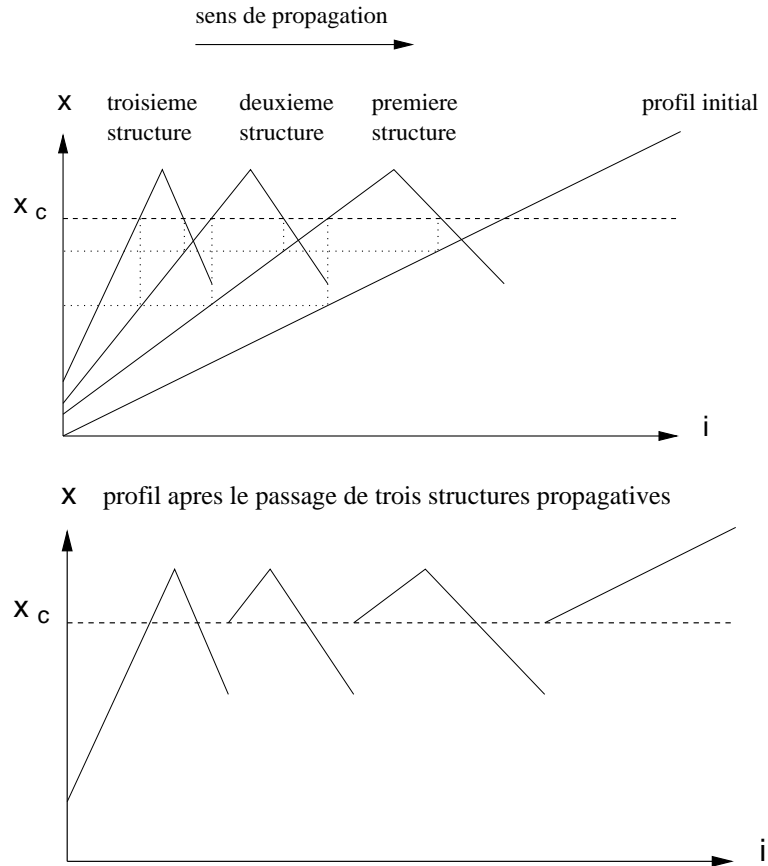


FIG. 3.44 - Représentation schématique de l'influence des structures propagatives successives, parcourant un domaine laminaire composé initialement d'une grande région non bloquante. On représente le passage de trois structures (haut), puis l'état résultant (bas). On suppose que la propagation des structures est beaucoup plus rapide que l'action de la diffusion qui aurait pour effet immédiat de réduire les discontinuités apparaissant en bordure des régions bloquantes.

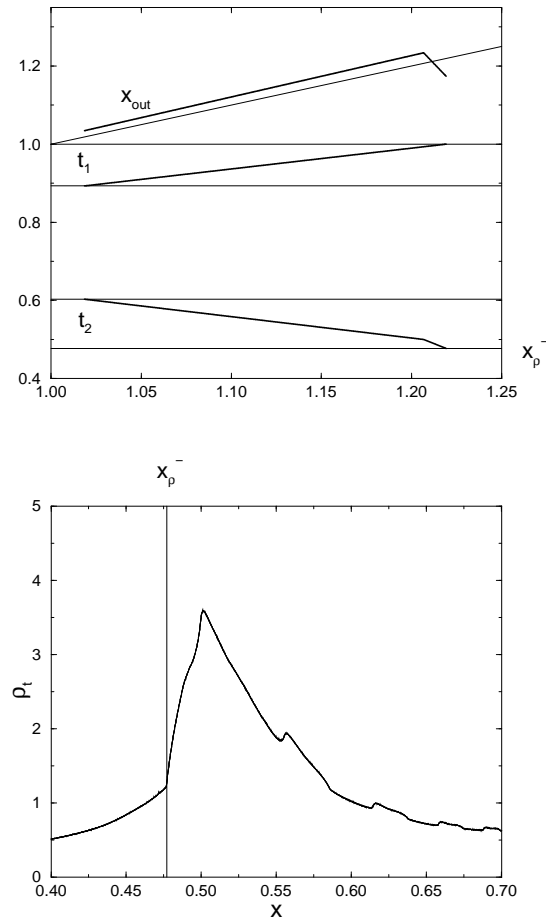


FIG. 3.45 - La figure du haut représente les différentes composantes des solitons de type  $x_{in}$   $t_1$   $t_2$   $l$   $l \dots$   $x_{out}$  pour  $r = 3$ ,  $\epsilon = 0.35986$ . La ligne verticale sur la figure du bas marque la borne inférieure  $x_p^-$  du domaine de définition des sites  $t_2$ . En ce point la distribution des sites turbulents n'est pas dérivable.



*DDP*, faire la statistique des longueurs de ces régions, conditionnée par la taille des domaines laminaires dans lesquelles elles sont. On présente ces résultats sur la Fig. 3.46 qui doit être comparée à la Fig. 3.36.

Comme on peut le voir sur cette figure, la situation est loin d'être aussi claire que pour le modèle *DDP* où un comportement algébrique était rapidement visible. Ici les coupures exponentielles sont d'autant plus tardives que la taille des domaines laminaires est grande. Il n'y a pas de convergence nette vers un régime algébrique. Une autre différence concerne la taille des régions bloquantes qui n'est pas limitée et semble aussi diverger avec la taille des domaines laminaires.

Les données statistiques ne nous ont pas permis de conclure de manière satisfaisante sur l'existence d'une structure "non triviale" au sein des domaines laminaires pour le cas  $r = 3$ .

Nous verrons par la suite que les mécanismes de structuration que l'on croit dominant dans le cas  $r = 3$ , induisent une divergence logarithmique de la taille moyenne des régions bloquantes et non bloquantes en fonction de la taille des domaines laminaires, et que cela pourrait expliquer les difficultés que l'on a eues.

Comme pour la mesure des exposants, des mesures statistiques concluantes sont hors de portée pour ce cas et une stratégie plus productive consiste à étudier les mécanismes de structuration aussi généraux que possible, plutôt que d'étudier très en détail un cas dont on ne sait pas s'il est représentatif ou non.

### Mécanisme de structuration des zones laminaires

Nous allons présenter des résultats préliminaires concernant les mécanismes de structuration des domaines laminaires.

En reprenant l'image présentée dans la Fig. 3.44, nous allons dans un premier temps supposer que la propagation d'une structure est "instantanée" comparée au temps d'évolution de la dynamique interne qui sera dominée par la diffusion. Dans la même ligne, nous nous limitons au cas d'un domaine laminaire de taille constante  $L$ , dont les bords sont en permanence susceptibles de nucléer des structures propagatives avec une certaine probabilité.

La Fig. 3.44 montre que l'effet principal d'une structure se propageant dans une région non bloquante est de lui substituer au moins trois régions, alternativement non bloquante, bloquante et non bloquante. On représente sché-

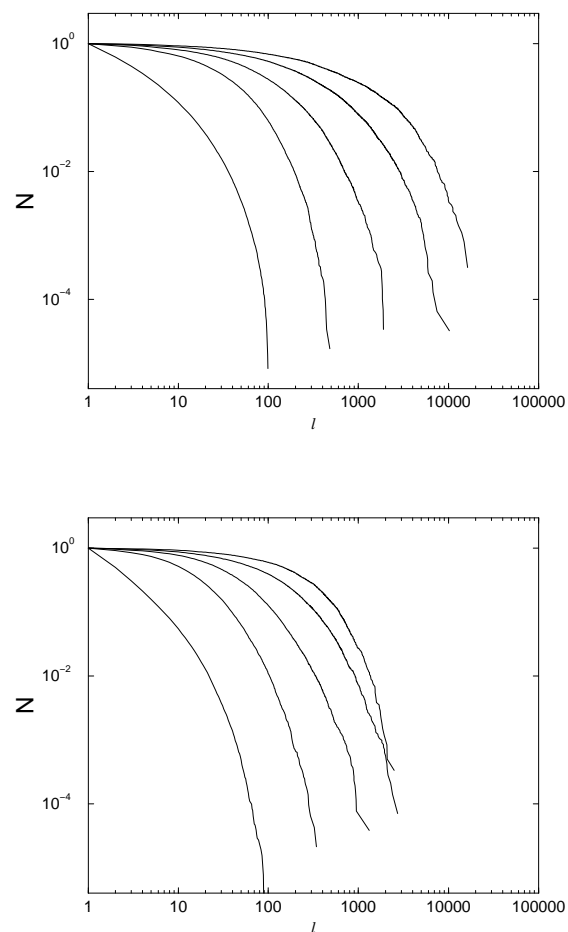


FIG. 3.46 - Histogrammes conditionnés et intégrés des longueurs des zones bloquantes (figure du bas) et non bloquantes (figure du haut), les longueurs de cumul sont 100, 500, 2500, 12500 pour le modèle MIST à  $r = 3$ ,  $\epsilon = 0.35986$  au temps  $t = 3 \cdot 10^5$  pour un système de  $5 \cdot 10^7$  sites.

matiquement sur la Fig. 3.47, les transformations successives d'un domaine initialement non bloquant, après le passage de 6 structures propagatives transformant une zone laminaire de taille  $l$  en trois segments de taille  $l_1$ ,  $l_2$  et  $l_3$  respectivement non bloquant, bloquant et non bloquant. Cela définit trois paramètres  $l_1/l$ ,  $l_2/l$  et  $l_3/l$  (dont la somme est égale à 1).

On inclut un effet de bord caractéristique du phénomène de nucléation en bordure de zone turbulente: les points extrêmes sont non bloquants avec la probabilité  $p$  et bloquant avec la probabilité  $1 - p$ . Si un des points extrêmes est non bloquant, on repère la taille  $l$  de la zone non bloquante adjacente. Une fois isolée, elle est transformée selon le découpage de longueurs  $l_1$ ,  $l_2$  et  $l_3$ .

Il reste alors à appliquer une dynamique de type "diffusif" au sein du domaine laminaire. Le diagramme spatio-temporel de la fig. 3.15, montre que les régions bloquantes régressent, pour laisser place à des régions non bloquantes de plus en plus grandes. C'est typique d'un processus de croissance de domaines où l'un des états est plus stable que l'autre. Pour modéliser ce processus dans un automate cellulaire probabiliste, nous utilisons les règles d'évolution présentée dans le tableau à double entrée 3.7.

	$NB$	$B$
$NB$	$NB$	$\begin{matrix} NB & q \\ B & 1 - q \end{matrix}$
$B$	$\begin{matrix} NB & q \\ B & 1 - q \end{matrix}$	$B$

TAB. 3.7 - Règles d'évolution de type diffusif, imposée au sein des domaines laminaires.  $NB$  symbolise un site non bloquant et  $B$  un site bloquant.

Une valeur de  $q$  supérieure à 0.5 induira la régression des régions bloquantes. On représente un tel cas sur la Fig. 3.48

Il faut maintenant caractériser la structure qui émerge à taille fixée. On représente sur la Fig. 3.49 les histogrammes des longueurs  $\tau$  des structures propagatives en régime permanent dans un domaine laminaire de  $10^6$  sites.

On peut constater que les histogrammes intégrés en partant des plus grandes longueurs varient en  $1/\tau$  sur environ trois décades, et ne sont limités que par une coupure exponentielle imposée par la taille du domaine laminaire. Cela signifie que les longueurs sont distribuées en  $1/\tau^2$ .

Il ne faut pas oublier que nous sommes à taille fixée, et que pour revenir à un résultat au point critique il faut convoluer la distribution à taille fixée par

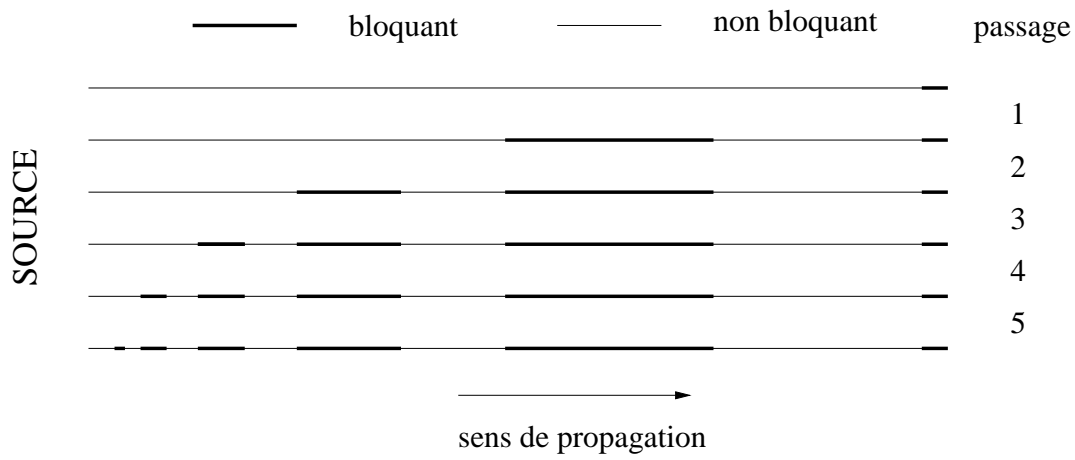


FIG. 3.47 - Représentation schématique des transformations successives des zones non bloquantes en zones bloquantes, non bloquantes et bloquantes, après le passage de structures propagatives.

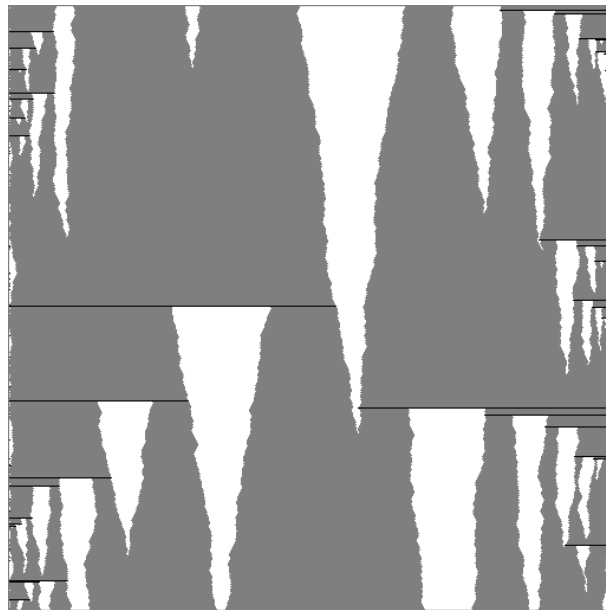


FIG. 3.48 -  $p = 1$ ,  $q = .6$ ,  $l_1/l = 0.5$ ,  $l_2/l = 0.3$ ,  $l_3/l = 0.2$  et  $L = 512$  sur 512 itérations, les bloquants sont en blanc, les non bloquants sont en gris et les structures propagatives (de vitesse infinie) en noir.

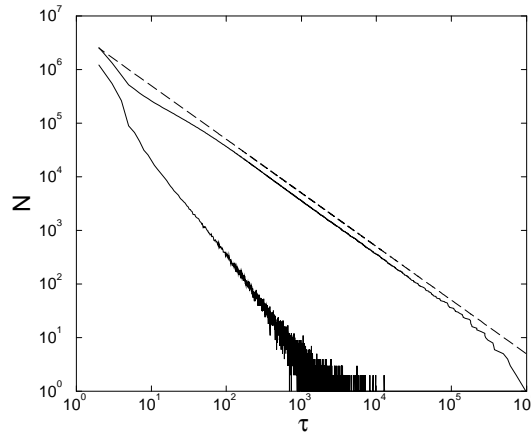


FIG. 3.49 - *Histogramme (courbe du bas) des longueurs des structures propagatives  $\tau$  en régime permanent dans un système de  $10^4$  sites pour les mêmes paramètres que ceux de la Fig. 3.48. On représente également les histogrammes intégrés en partant des plus grandes longueurs, afin de limiter les effets de réalisation. La courbe en tiret correspond à un comportement en  $1/\tau$ .*

la distribution des tailles des domaines laminaires. Cela revient essentiellement à additionner les exposants des deux distributions. L'exposant gouvernant la distribution des tailles des domaines laminaires est typiquement de l'ordre de 1.7, d'où un exposant total de l'ordre de 3.7. Il doit être comparé à 3.55, et on dira que cette mesure est compatible avec celle du modèle MIST.

Nous avons observé la même statistique pour toutes les valeurs de  $q > 0.5$ . C'est là une première évidence de l'existence d'un mécanisme robuste à l'origine d'une statistique non triviale au sein des domaines laminaires.

Par ailleurs, les largeurs  $l$  des zones laminaires bloquantes et non bloquantes sont distribuées en  $1/l$  d'où une divergence logarithmique de la taille moyenne des régions bloquantes et non bloquantes dans la limite d'un domaine laminaire infini. Cette divergence lente de la taille caractéristique des domaines peut expliquer les difficultés rencontrées dans le modèle MIST à  $r = 3$  (voir Fig. 3.46).

Nous ne présenterons pas plus de résultats concernant cette approche, qui rappelons le est encore très prospective. Cependant ces résultats montrent que la voie qui consiste à “décortiquer” les mécanismes de structuration est la bonne.

Par ailleurs, les règles que l'on considère ne sont pas "locales" puisque les structures propagatives transforment le milieu instantanément, en tenant compte de la taille du domaine à transformer. On devra donc établir des règles locales modélisant ces structures propagatives. Nous pourrions alors les inclure dans un modèle semi-probabiliste tenant compte des mécanismes de structuration des domaines laminaires, et des structures propagatives à queue turbulente. Nous utilisons délibérément le qualificatif "semi-probababiliste" dans la mesure où ces modèles incluent beaucoup de processus typiquement déterministes tels que la propagation systématique à vitesse constante dans une région laminaire non bloquante.

### 3.3.4 Synthèse

La conclusion de cette section est tout entière résumée dans le diagramme spatio-temporel de la Fig. 3.50. On y distingue trois types de sites : les turbulents (en noir), les laminaires bloquants (en blanc) et les laminaires non bloquants (en gris).

On peut remarquer que comme dans le modèle DDP, la propagation de l'état turbulent se fait de façon efficace grâce aux structures propagatives à queue turbulente. L'intérêt d'un diagramme aussi grand est qu'il montre qu'il existe de très grandes structures<sup>24</sup> de ce type. Si la distribution de leur temps de vie décroissait exponentiellement vite, alors des événements aussi longs seraient rarissimes. Dans notre cas, le comportement algébrique de la distribution des temps de vie est un signe révélant l'existence d'un lien entre ces structures et les propriétés critiques aux points de transition.

Nous avons utilisé le modèle DDP pour montrer que ce sont les propriétés "non triviales" des domaines laminaires, i.e. la distribution algébrique des tailles des régions non bloquantes, qui étaient à l'origine de la non universalité de ce modèle au point de codimension 2. Dans ce cas, il y a une corrélation importante entre les propriétés de propagation de l'état turbulent et la taille des domaines laminaires.

L'analogie avec le modèle MIST n'est bien sûr que partielle puisque la dynamique au sein des domaines laminaires n'est pas du type percolation dirigée, comme nous l'avons définie pour le modèle DDP. De plus, dans ce cas nous avons dû régler les propriétés critiques des domaines laminaires indépendamment de celles de la phase turbulente.

---

24. C'est à dire se propageant longtemps ou sur une grande distance avant de rencontrer un obstacle.

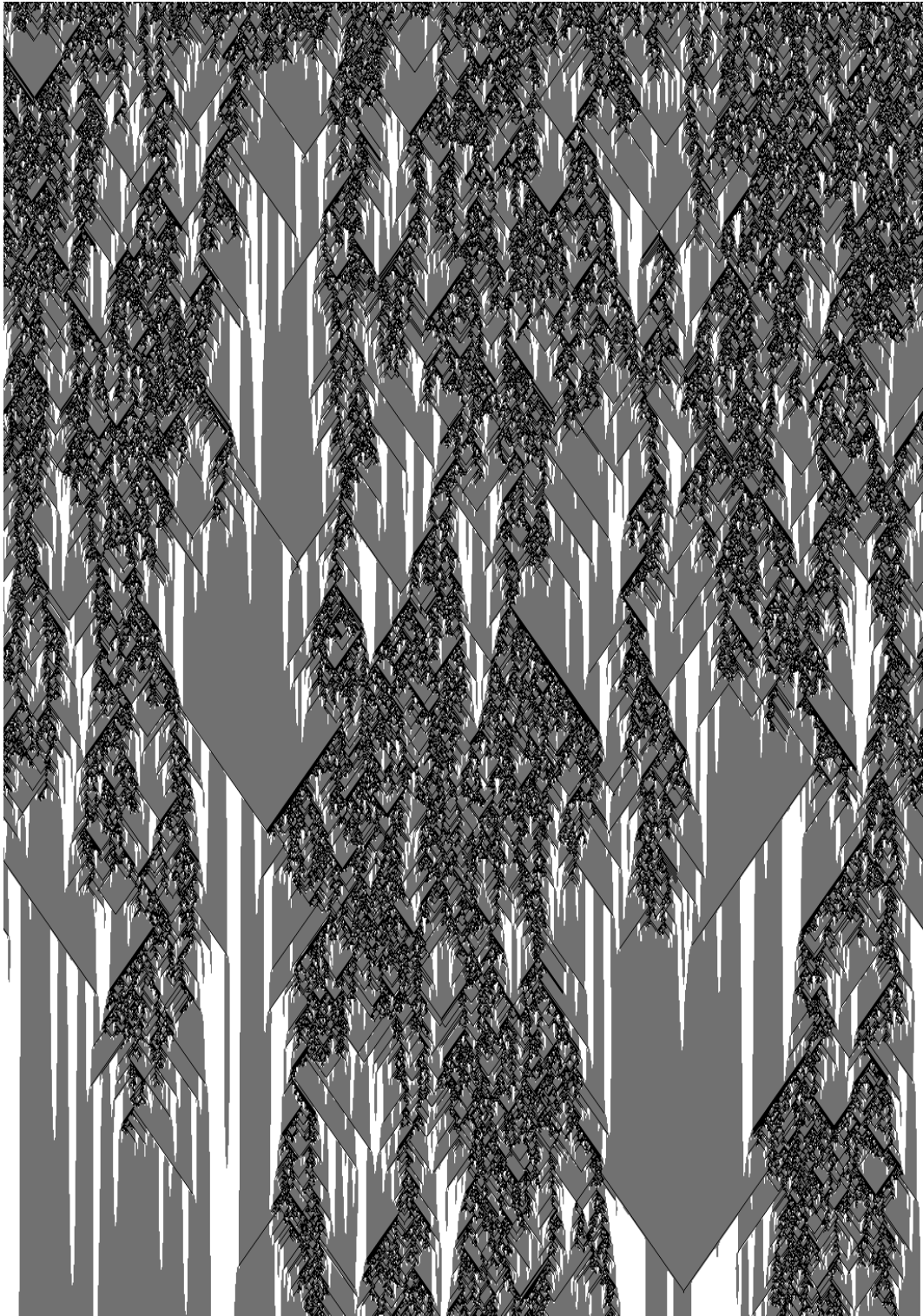


FIG. 3.50 - *Diagramme spatio-temporel de 2048 sites par 2048 itérations, pour les même valeurs de paramètre que la Fig. 3.15. Les codes de couleurs sont identiques : turbulents en noir, laminaires bloquants en blanc et laminaires non bloquants en gris.*

L'étape suivante a consisté à montrer que les structures propagatives à queue *non* turbulente maintiennent des régions bloquantes et non bloquantes au sein des domaines laminaires, sans limitation de taille (voir Fig. 3.50).

Pour répondre à la question sur l'universalité ou non des transitions dans le modèle MIST à  $k = 1$ , nous avons poursuivi l'étude des mécanismes de structuration des domaines laminaires en idéalisant les processus que nous avons identifiés. Cela a montré qu'il était possible de générer des domaines laminaires convergeant spontanément vers une organisation où les temps de vie des structures propagatives sont distribués algébriquement.

Cela ne constitue qu'une étape dans la mesure où l'on a extrait ces mécanismes d'un système plus complexe où coexistent des domaines laminaires et turbulents en interaction permanente.

Néanmoins, nous pensons que le cas à  $r = 3$  reste l'un des plus intéressants. Il semble acquis que le modèle MIST dans le voisinage du point de transition à  $r = 3$ , possède toutes les propriétés nécessaires pour ne pas rentrer dans la classe d'universalité de la percolation dirigée, même si les mesures d'exposants ne sont pas convaincantes à elles seules.



## 3.4 Conclusion

### 3.4.1 Synthèse

Nous avons montré tout au long de cette étude en quoi les structures propagatives, présentes dans le modèle MIST, pouvaient influencer les propriétés critiques aux seuils des transitions continues et dans leur voisinages.

Pour cela, nous nous sommes constamment référés à des modèles semi-probabilistes incluant les mécanismes en cours de discussion. Cette approche minimale s'est révélée indispensable à cause du faible nombre de paramètres de contrôle du modèle MIST<sup>25</sup>.

Nous avons mis en évidence les problèmes liés à la définition des paramètres d'ordre. Nous avons notamment vu que la densité de solitons ne devait pas être incluse dans le paramètre d'ordre des modèles *laminaire – turbulent – soliton I* et *II* lorsque ceux-ci ne sont pas des vecteurs efficaces de l'état turbulent. C'est par exemple le cas lorsque les structures propagatives n'ont pas de queue turbulente, ou que les interférences conduisent à l'annihilation de deux solitons de vitesses opposées.

Si on ne prend pas cette précaution, on risque de ne pas voir la transition (cas I) ou de mesurer une valeur erronée de  $\alpha$  (cas II).

Nous avons alors redéfini des paramètres d'ordre adaptés au modèle MIST, par exemple  $m_X(x, y, t) = \int_x^y \mu(z, t) dz$  ou la prise en compte de la distribution complète  $\mu$ , à tous temps et pour toutes les valeurs de  $x$ .

Tous les cas que nous avons étudiés à  $k = 1$ , ont montré la convergence de la distribution  $\mu(x, t)$ , pour  $x < 1$ , vers une distribution “invariante” dans le régime d'échelle. Ce critère est suffisant pour lever toute ambiguïté dans la définition du paramètre d'ordre.

Ces précautions “numériques” nous ont permis de confirmer l'existence de points de transitions où les exposants critiques mesurés sont compatibles avec ceux de la classe d'universalité de la percolation dirigée, et d'autres où ils sont suffisamment distincts pour être différenciés compte tenu de la précision de nos estimations. A côté de ces cas “clairs”, il y a un ensemble de points où il est difficile de se prononcer.

Les mesures directes d'exposants critiques ne seront jamais un élément suffisant pour conclure à l'appartenance ou non à une classe d'universalité. Elles

---

<sup>25</sup>. Dans ce cas, c'est un handicap car il y a plusieurs mécanismes en jeu, qui, a priori, dépendent simultanément de ces paramètres.

se font en temps et en taille finis, et cela ne constitue qu'une approximation de la limite des tailles et des temps infinis.

Nous avons donc étudié les propriétés dynamiques des structures que plusieurs auteurs soupçonnaient être à l'origine des comportements critiques distincts de ceux de la percolation dirigée. Nous avons alors montré qu'il existe un domaine de l'espace des paramètres,  $\epsilon r > 2$ , où les structures propagatives de vitesse 1, dominantes dans cette région, sont linéairement instables et ne peuvent être des vecteurs efficaces de l'état turbulent. Dans ce domaine, les mesures d'exposants critiques ont confirmé l'existence de transitions continues relevant de la classe d'universalité de la percolation dirigée.

Lorsque ces structures sont linéairement stables, leur temps de vie est contrôlé par l'existence d'une valeur de blocage  $x_c = 1/(1 - \epsilon/2)$ , contraignant le type de domaines laminaires dans lesquelles elles peuvent se propager.

A ce stade, il est apparu nécessaire d'étudier la structure des domaines laminaires, au sein desquelles nous avons montré qu'il fallait distinguer les régions bloquantes et non bloquantes. Nous avons principalement porté notre attention sur le cas  $r = 3$  et  $\epsilon_c \simeq 0.35986$ , bien que celui-ci soit un des plus délicats du point de vue des mesures d'exposants. La raison en est que les structures dominantes dans ce domaine de l'espace des paramètres sont plus simples à étudier analytiquement car toujours de vitesse 1.

L'existence d'une organisation non triviale et permanente au sein des domaines laminaires, couplée à celle de structures propagatives à queue turbulente, est la cause la plus vraisemblable de l'émergence de propriétés critiques distinctes de celles de la classe d'universalité de la percolation dirigée. Ces processus sont présents simultanément et "spontanément" dans le modèle MIST.

Pour étayer notre argumentation, nous avons une fois de plus eu recours à un automate cellulaire probabiliste, le modèle DDP. Ses propriétés critiques ne sont différentes de celles de la percolation dirigée que sur les points de codimension 2. Cela nous a permis de souligner la cohérence nécessaire entre les mécanismes de structuration des domaines laminaires et les propriétés critiques de la phase turbulente, pour sortir de la classe d'universalité de la percolation dirigée.

Les comparaisons faites sur les statistiques des temps de vie des structures propagatives, entre le modèle MIST et un point de codimension 2 du modèle DDP, montrent sans ambiguïté que les propriétés critiques au point de transition à  $r = 3$  sont gouvernées par des mécanismes fondamentalement différents de ceux de la percolation dirigée.

Pour répondre plus généralement à la question sur l'appartenance du modèle MIST à la classe d'universalité de la percolation dirigée lorsque les structures propagatives sont linéairement stables, il nous faut distinguer deux scénarios :

- Les exposants critiques sont presque partout différents de ceux la percolation dirigée. Et dans ce cas, existe-t-il des valeurs privilégiées, suggérant l'existence de classes d'universalité spécifiques?

- Les exposants critiques sont presque toujours ceux de la percolation dirigée sauf en certains points de codimension 2, le long de la ligne de transition. Alors le réglage des propriétés critiques au sein des domaines laminaires est à l'origine du comportement critique différent de celui la percolation dirigée. La probabilité de trouver par "hasard" un de ces points de codimension 2 est nulle, mais leur influence se fait sentir dans tout leur voisinage sous la forme d'un "cross-over". Celui-ci est contrôlé par un temps caractéristique qui diverge lorsqu'on s'approche du point de codimension 2 en se déplaçant sur la ligne formée par les points de transition.

Dans ce contexte, nous avons entrepris l'étude des mécanismes de structurations d'un domaine laminaire de taille donnée. Cela a montré qu'ils pouvaient se structurer "automatiquement", sous l'action de la diffusion et d'une dynamique non locale. L'élément le plus déterminant de ce mécanisme est lié au rôle des structures propagatives à queue *non* turbulente qui transforment les régions non bloquantes en les découpant en régions successivement non bloquantes, bloquantes et non bloquantes.

Dans ces conditions, les domaines laminaires s'organisent de sorte que la distribution des temps de vie des solitons est génériquement algébrique. La probabilité d'avoir une structure de longueur  $\tau$  varie comme  $1/\tau^2$ . La convolution de cette distribution par la distribution des tailles des domaines laminaires donne une estimation de l'exposant critique contrôlant la statistique des temps de vie des structures propagatives de l'ordre de 3.7, comparable aux mesures directes sur le modèle MIST (de l'ordre de 3.5).

S'il fallait répondre aujourd'hui à une question sur la véracité de la conjecture de Pomeau dans le cas  $r = 3$ , nous dirions qu'il possède des caractéristiques suffisantes pour ne pas être dans la classe d'universalité de la percolation dirigée.

### 3.4.2 Perspectives

Nous allons décrire ici les voies qui nous semblent les plus propices à une clarification de la situation.

Le premier point consiste à chercher les “cross-over” attendus dans le cas où il existerait un petit nombre de points de codimension 2. Il faudrait pour cela affiner la recherche systématique des seuils, présentée sur le diagramme de phases de la Fig. 3.9, et estimer à  $\pm 10\%$  la valeur de  $\alpha$ . L’étude des valeurs de  $\alpha$  le long de la ligne de transition devrait nous permettre de localiser plusieurs de ces points de codimension 2, s’ils existent.

Le second point pourra confirmer l’existence d’un mécanisme de structuration local, à l’origine de la distribution algébrique des temps de vie des structures propagatives. Une telle approche nécessite des règles d’évolution assez complexes dont nous avons d’ores et déjà établi les grandes lignes. Elles impliquent plus de douze états différents pour la variable locale toujours définie sur un réseau triangulaire<sup>26</sup>.

Finalement une partie importante des résultats et outils qui ont été décrits tout au long des sections de ces chapitres, ont des implications sur les comportements que l’on peut observer lorsque  $k$  est inférieur à 1. Des différences importantes doivent cependant être soulignées. La première est liée à la contrainte imposée aux familles de solitons qui doivent maintenant vérifier  $x_{in} = x_{out} = x^*$ . Par ailleurs, la relaxation des domaines laminaires vers un milieu uniforme est maintenant exponentielle. Elle est de ce fait beaucoup plus rapide que la relaxation des fluctuations sous l’action de la diffusion, et l’argumentation de P. Grassberger et T. Schreiber est dans ce cas plus appropriée.

### 3.4.3 Epilogue

Ce travail avait pour objet principal l’étude du modèle MIST à  $k = 1$ . Nous avons expliqué dans l’introduction en quoi il permettait de discuter la véracité de la conjecture de Pomeau sur l’appartenance des transitions vers la turbulence via intermittence spatio-temporelle à la classe d’universalité de la percolation dirigée.

---

26. On peut diminuer le nombre d’états locaux en augmentant le nombre de voisins pris en compte pour déterminer l’état d’un site au temps  $t + 1$ .

Nous avons isolé certains des mécanismes provoquant l'apparition d'un régime d'intermittence spatio-temporelle différent de celui de la percolation dirigée. Ce nouveau régime est plus complexe dans la mesure où il inclut l'existence d'une structure multi-échelle au sein des domaines laminaires. Ils ne sont plus "passifs" et influencent fortement les propriétés de propagation de l'état turbulent.

On peut s'interroger sur le caractère "continu" des transitions que l'on a observées. Comme nous l'avons dit, l'état laminaire privilégié (laissé par la mort de la phase turbulente), est composé de régions bloquantes et non bloquantes. La transition est continue parce que la réduction de la variable locale (la fraction turbulent) ne prend pas en compte les fluctuations au sein des domaines laminaires.

Bien que cela nous ait permis de trouver les outils adaptés à l'étude de ce cas, on peut se demander si ce régime n'est pas trop spécifique au modèle MIST, et s'il peut rendre compte d'expériences ou situations réelles.

Comme nous l'avons déjà souligné, les structures propagatives à queue turbulente sont dérivables au voisinage de solution particulière de l'écoulement, et se situent à l'interface entre les domaines laminaires et des régions où la densité de sites turbulents est grande. Des structures de types rouleaux sont observées en bordure des spots turbulents de l'écoulement de Couette plan [7], et pourraient bien jouer un rôle important dans la dynamique de croissance de ces objets.

La dégénérescence de l'état absorbant dans les systèmes expérimentaux est un point plus délicat. L'état laminaire dans ces systèmes est souvent un état périodique émergent après déstabilisation d'un écoulement uniforme. Nous avons vu que la périodicité de l'état laminaire signifie dégénérescence de celui-ci à cause de la phase associée à ce mode. Mais dans le cas des systèmes continus, on peut a priori déformer continûment la solution laminaire pour reconnecter deux domaines laminaires déphasés.

Dans le cas des cellules convectives de Rayleigh-Bénard, il y a une autre origine possible de la dégénérescence de l'état laminaire. Elle vient de l'existence d'une bande de vecteurs d'onde instables associés à des solutions de type rouleau de largeurs différentes. Il faudrait alors vérifier s'il existe des structures se propageant dans des milieu laminaire de nombre d'onde variable, jusqu'à ce qu'elle franchisse un seuil provoquant leur déstabilisation. Ce processus serait très proche de celui décrit pour les structures propagatives à queue turbulent du modèle MIST.

---

Pour conclure ce chapitre, nous dirons que les conditions nécessaires à l'observation d'un comportement similaire à celui du modèle MIST, sortant de la classe d'universalité de la percolation dirigée, restent très contraignantes. Cependant, cela montre que les structures propagatives que l'on voit dans les transitions vers la turbulence par intermittence spatio-temporelle sont des objets qu'il faut absolument prendre en compte dans les mécanismes qui président à l'apparition de ces régimes de turbulence faible.

### 3.5 Appendice A : Mesure des exposants critiques

La divergence des longueurs de corrélation lorsqu'on approche un point de transition continue est liée à l'apparition progressive d'une distribution fractale des sites turbulents au seuil. La principale caractéristique de ces "objets" fractals et qu'ils ne possèdent pas de longueur typique permettant de les décrire. Pour prendre en compte cette propriété d'auto-similarité, on doit introduire la notion d'invariance d'échelle. On ne décrit plus le système à une longueur (ou échelle) donnée, mais plutôt la manière dont les propriétés du système changent lorsqu'on se place à des échelles différentes. Les fonctions les plus simples décrivant la variation des caractéristiques du systèmes avec l'échelle sont les fonctions homogènes. On peut montrer de façon très générale que les fonctions homogènes à une variable sont des lois de puissance dont l'exposant est arbitraire (voir par exemple le chapitre 10 de la référence [88]). Ce sont ces exposants qui caractérisent les propriétés critiques du système au seuil d'une transition continue et dans son voisinage. On parle alors d'exposants critiques.

Par analogie avec la classe d'universalité de la percolation dirigée (voir appendice B (Sect. 3.6)), on suppose qu'il existe trois exposants statiques indépendants. Les relations entre les exposants sont données par des transformations algébriques simples sur les fonctions homogènes à plusieurs variables<sup>27</sup>.

Les exposants critiques sont plus ou moins difficiles à mesurer, et les relations qui existent entre eux nous permettent de choisir les plus simples à obtenir numériquement, pour finalement revenir à ceux désirés.

Dans le cas de la percolation dirigée, les meilleures estimations sont données par les mesures dynamiques d'exposants à partir d'un germe turbulent. Ce germe est une perturbation localisée d'amplitude fini de l'état laminaire. On mesurera par exemple la vitesse moyenne de propagation de l'état turbulent dans l'état laminaire, ou encore le temps de vie moyen du germe turbulent.

Ces mesures sont très rapides car les sites compris dans les grands domaines laminaires de part et d'autre du germe, n'ont pas à être pris en compte lors de l'itération du réseau. Ce n'est pas possible pour le modèle MIST, car même dans les grandes zones laminaires il existe une dynamique diffusive qui ne peut pas être ignorée.

---

27. On pourra consulter la référence [88] pour les notions de bases relatives aux fonctions homogènes et à leur utilisation. Une application plus spécifique au modèle MIST se trouve dans la référence [58].

La principale difficulté reste avant tout l'estimation précise de la position du point critique, en s'affranchissant des effets de taille finie en espace et en temps.

Nous avons choisi de la déterminer en localisant le point tel que la densité de sites turbulents<sup>28</sup> décroisse en loi de puissance, en partant d'une condition initiale complètement turbulente et décorrélée<sup>29</sup>. Cette procédure revient à faire une "trempe" de la phase turbulente en changeant brusquement la valeur du paramètre de contrôle. On étudie ainsi le temps de relaxation de la phase turbulente vers la phase laminaire, au seuil ou sous le seuil de la transition.

Plus précisément, on observe au seuil de la transition, la convergence du système dont les corrélations spatiales sont initialement petites devant la taille du système, vers un état asymptotique turbulent pour lequel les longueurs de corrélations (spatiales et temporelles) sont infinies.

La densité de sites turbulents est fonction du temps, des paramètres  $\epsilon$  et  $r$ , de la taille du système et de la condition initiale symbolisée par la variable  $s$  :  $m(\epsilon, r, L, t, s)$ . En général on ne fera apparaître que les dépendances dont on a besoin pour la discussion en cours.

Dans le cas des trempes à partir d'états complètement turbulents non corrélés, la limite de la taille infinie rend caduque la dépendance en  $s$  car d'une certaine manière toutes les conditions initiales sont contenues dans un système de taille infinie et il n'y a pas lieu de faire de moyenne d'ensemble. Dans cette limite, on définit  $\alpha$  par

$$\lim_{L \rightarrow \infty} m(\epsilon_c, r_c, L, t) \propto t^{-\alpha} \quad t \gg t_0 \quad . \quad (3.28)$$

Cette mesure n'est pas affectée par les effets de taille finie tant que les longueurs de corrélation instantanées associées ( $\zeta_{\parallel}$  en temps et  $\zeta_{\perp}$  en espace) sont petites devant la taille du système et le nombre d'itérations.

Par contre, on peut s'attendre à ce qu'un certain temps soit nécessaire avant que la dynamique d'échelle<sup>30</sup> se mette en place. Ce régime apparaît généralement après un transitoire  $t_0$  plus ou moins long. Nous avons considéré des systèmes de  $10^7$  sites, sur  $10^5$  itérations, permettant d'obtenir la position des seuils avec une erreur relative de l'ordre de  $10^{-4}$ . Les mesures de  $\alpha$  qui en découlent, donnent une estimation à quelques pour cents près.

---

28. Ou tout autre paramètre d'ordre adapté au cas considéré.

29. En général, on utilise une condition initiale où chaque site se voit attribuer une valeur tirée au hasard dans l'intervalle  $[0, 1[$  selon une loi uniforme.

30. On désigne ainsi les régimes où l'on observe les comportements algébriques caractéristiques des limites de tailles et de temps infinies.



L'estimation de barres d'erreur fiables sur les mesures d'exposant est une question très peu abordée dans la littérature, bien qu'elle n'admette pas encore de réponse évidente. Elle est pourtant cruciale lorsque l'on discute de l'appartenance ou non à une classe d'universalité. On est très souvent contraint à une estimation empirique de ces barres d'erreur, qui est souvent influencée par les convictions acquises. Nous allons détailler les techniques que nous avons utilisées.

La mesure de  $\alpha$  passe généralement par une régression linéaire sur une représentation en échelle  $\log - \log$  de  $m(\epsilon_c, r_c, L, t)$  pour un système de grande taille. On suppose alors que cette fonction est de la forme  $a t^{-\alpha}$ . A cause du transitoire  $t_0$ , une forme plus correcte serait  $a(t - t_0)^{-\alpha}$ . En développant cette solution en  $t_0/t$  petit, on obtient

$$\begin{aligned} \log(m) &= -\alpha \log(t - t_0) + \log(a) \\ &= -\alpha \log(t) + \log(a) - \alpha \log\left(1 - \frac{t_0}{t}\right) \\ &= -\alpha \log(t) + \log(a) + \alpha \frac{t_0}{t} + \mathcal{O}\left[\left(\frac{t_0}{t}\right)^2\right] \end{aligned} \quad (3.29)$$

Même si cette correction est linéaire en  $t_0/t$ , elle diminue significativement l'intervalle où le comportement algébrique apparaît. Dans la phase final de mesure de cet exposant, nous avons régulièrement corrigé les estimations en utilisant une combinaison linéaire de  $m$  à deux temps, tels que  $t' = nt$ , de sorte que :

$$\frac{\log(m(t)) - n \log(m(t'))}{1 - n} = -\alpha \left( \log(t) - \frac{n \log n}{1 - n} \right) - \log(a) + \mathcal{O}\left[\left(\frac{t_0}{t}\right)^2\right] \quad (3.30)$$

Reste alors à faire la mesure de la pente, pour extraire  $\alpha$ . Cette méthode est différente de celles généralement utilisées où l'on effectue une mesure locale des exposants aboutissant à l'expression :

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= \frac{\log(m(t)) - \log(m(t'))}{\log(n)} \\ &= \alpha + \alpha \frac{t_0}{t} \frac{n - 1}{n \log n} + \mathcal{O}\left[\left(\frac{t_0}{t}\right)^2\right] \end{aligned} \quad (3.31)$$

On peut constater que cela ne permet pas de s'affranchir du terme linéaire, qui peut cependant être supprimé en faisant une combinaison linéaire des exposants instantanés à deux temps différents. L'augmentation de l'amplitude

des fluctuations est le prix à payer pour cet ordre supérieur<sup>31</sup>. Par ailleurs, plutôt que de nous limiter à une régression linéaire à deux points, nous avons considéré l'ensemble des points compris dans l'intervalle  $[t, t']$  et ainsi obtenu un signal beaucoup moins fluctuant que ceux généralement trouvés dans la littérature.

L'usage veut évidemment que les différentes méthodes de mesures soient utilisées en parallèle, pour obtenir une estimation fiable de  $\alpha$  et des barres d'erreur associées .

Dans le cas où il y a plusieurs paramètres de contrôle (deux pour le modèle MIST à  $k = 1$ ), on simplifie généralement la recherche de la position du seuil en ne laissant qu'un paramètre libre.

La convergence vers le seuil de la transition se fait en réduisant l'intervalle de confiance du paramètre laissé libre, tel que la densité de site turbulent sature pour la borne supérieure, et amorce une décroissance exponentielle pour la borne inférieure.

Les Fig. 3.51, 3.52 et 3.53 montrent certaines des étapes aboutissant à l'estimation de  $\alpha$  pour  $\epsilon = 2/3$  en variant  $r$ .

Les transitions que l'on regarde sont continues, signifiant que la densité de sites turbulents dans la phase turbulente à temps long tend continûment vers 0 lorsqu'on approche le seuil par des valeurs supérieures. La phase finale de cette convergence est gouvernée par l'exposant critique  $\beta$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{L \rightarrow \infty} m(\epsilon_c + \delta\epsilon, r_c + \delta r, L, t) \propto \delta^\beta \quad (3.32)$$

où  $\delta$  dépend de  $\delta\epsilon$  et  $\delta r$  et est une mesure de la distance au seuil.

Cette mesure est extrêmement sensible aux erreurs commises sur la position du seuil. Il est donc difficile, voir impossible d'obtenir une mesure fiable de  $\beta$  si le seuil ne nous est pas donné par une autre méthode. Nous utiliserons donc l'estimation obtenue lors de la mesure de  $\alpha$ .

Nous avons considéré des systèmes de  $5 \cdot 10^6$  sites avec  $1 > \delta > 10^{-4}$ , l'erreur relative commise étant de l'ordre de 5% (elle reste principalement induite par l'erreur sur l'estimation de la position du seuil). Nous montrons un exemple de mesure de  $\beta$  sur la Fig. 3.54.

Pour obtenir un troisième exposant critique, nous allons étudier un des effets de taille finie. Dans un système de taille finie  $L$ , l'approche du seuil par

---

31. Cette correction est importante à temps court et permet en générale d'améliorer significativement les mesures de  $\alpha$  au début du régime d'échelle.

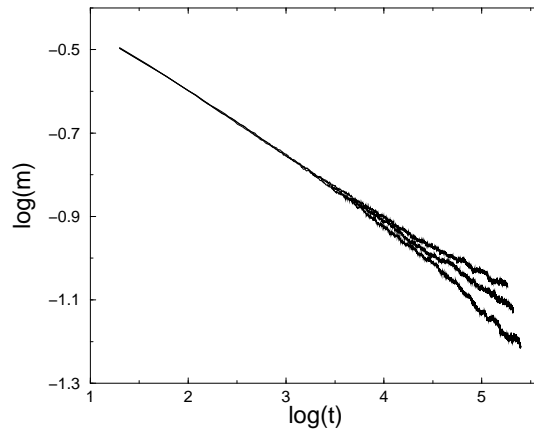


FIG. 3.51 - Densité de sites turbulents en fonction du temps pour  $\epsilon = 2/3$  et de haut en bas  $r = 3.7240, 3.7245$  et  $3.7250, L = 5 \cdot 10^6$ . La courbe supérieure montre le début de la saturation, alors que la courbe inférieure commence à décroître exponentiellement. La courbe intermédiaire donne une première estimation du seuil autour de  $3.7245$ . L'amplitude des fluctuations indique qu'une meilleure estimation nécessite l'utilisation d'un système de plus grande taille. On notera que les évolutions du système pour des valeurs de paramètres très proches (la différence relative est inférieure à  $2 \cdot 10^{-4}$ ), reste discernable, ce qui justifie les estimations très précises que l'on donne de la position des seuils.

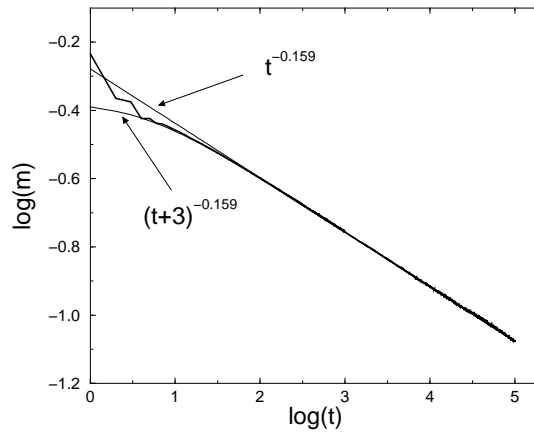


FIG. 3.52 - Densité de sites turbulents en fonction du temps pour  $r = 3.7246, \epsilon = 2/3, L = 5 \cdot 10^7$ . On superpose la meilleure loi de puissance de la forme  $(t - t_0)^{-\alpha}$ , donnant  $t_0 \simeq -3$  et  $\alpha = 0.159$ . Le terme en  $t_0$  a pour effet de corriger la légère courbure apparaissant à temps court.

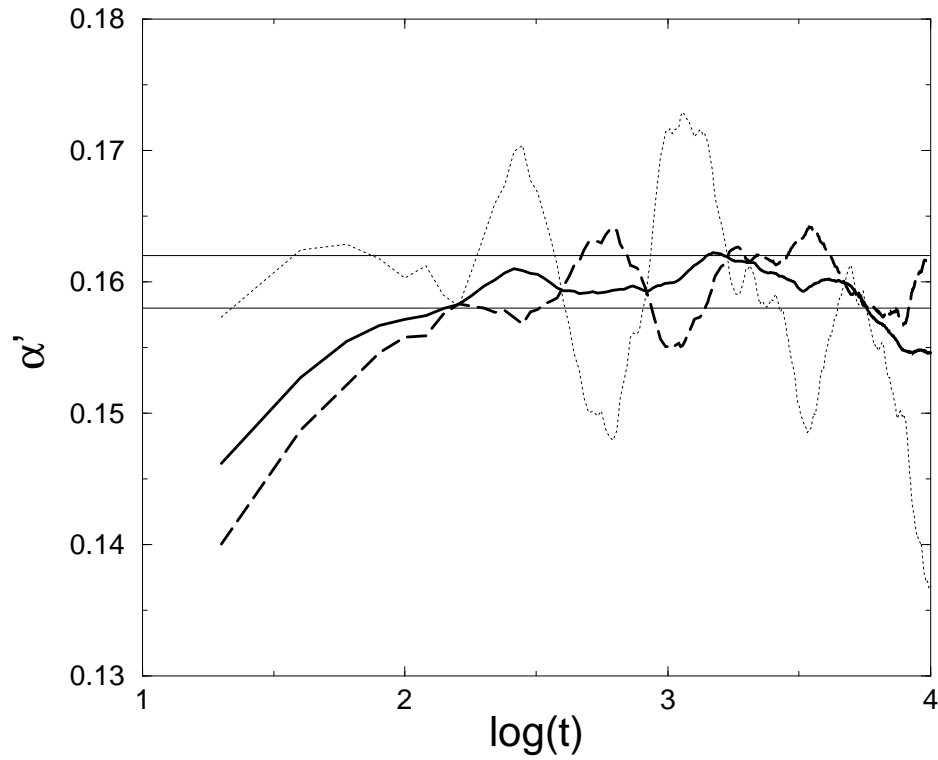


FIG. 3.53 - Exposants locaux  $\alpha'$  en fonction du temps avec un rapport  $t'/t = 6$  (trait plein),  $t'/t = 3$  (trait en tiret), et l'estimation corrigée du terme  $t_0/t$  via une combinaison linéaire des deux estimations précédentes (ligne en pointillés). On peut constater qu'à temps court l'exposant corrigé retombe dans la bande constituée par les deux limites 0.162 et 0.158. A temps plus long les fluctuations bien que centrées sur 0.160 deviennent très importantes.

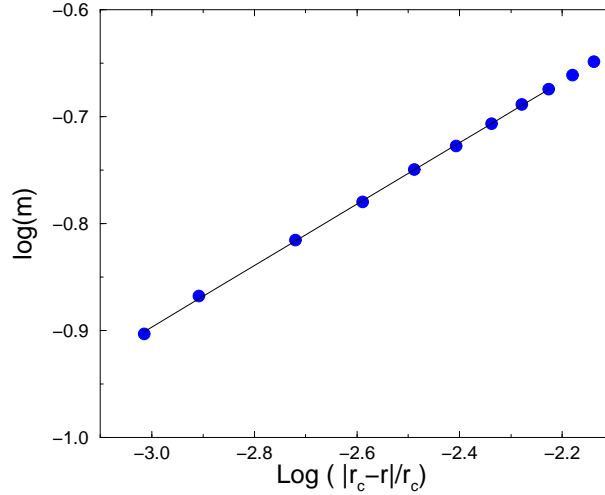


FIG. 3.54 - Densité de sites turbulent dans la phase turbulente en s’approchant du seuil pour le modèle MIST en fonction de la distance au seuil  $\epsilon_c = 2/3$  et  $r_c = 3.7246(1)$ . La régression linéaire sur les 9 derniers points (ligne continue) donne une estimation de  $\beta = 0.282(6)$ .

des valeurs supérieures se manifeste par la décroissance continue de la densité moyenne de sites turbulents, mais également par la divergence des fluctuations relatives autour de cette moyenne. Cela fait qu’il y a toujours à un moment ou à un autre, une “fluctuation” assez importante pour que la densité devienne nulle, et que le système soit alors bloqué dans l’état absorbant.

On peut alors étudier le temps de vie moyen de la phase turbulente dans un système de taille  $L$  en partant d’une condition initiale où tous les sites sont turbulents et leurs valeurs distribuées uniformément.

Au dessus du seuil, ce temps de vie moyen, noté  $\tau(\epsilon, r, L)$ , croît exponentiellement vite avec la taille du système. Sous le seuil, il est fini et dépend peu de la taille du système, alors qu’au seuil et pour des tailles suffisamment grandes,  $\tau$  varie en loi de puissance avec  $L$ , définissant un autre exposant, noté  $z$

$$\tau(\epsilon_c, r_c, L) = \langle \tau_s(\epsilon_c, r_c, L, s) \rangle_s \propto L^z \quad . \quad (3.33)$$

On présente un exemple de mesure de  $z$  sur la Fig. 3.55.

Ces effets de taille finie sont très sensibles à l’existence de transitoires et ne permettent pas de mesures fiables si le seuil n’est pas connu. C’est un des problèmes à l’origine de certaines des mesures erronées présentées dans la référence [58].

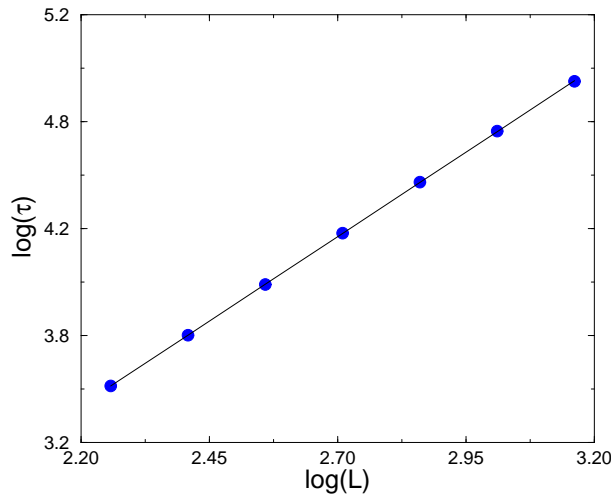


FIG. 3.55 - *temps de vie moyen de la phase turbulente au seuil de la transition  $\epsilon_c = 2/3$  et  $r_c = 3.7246(1)$ , en fonction de la taille du système. La régression linéaire sur l'ensemble des points donne une estimation de  $z = 1.58(2)$ .*

On a ainsi un ensemble de 3 exposants indépendants<sup>32</sup>, nous permettant d'obtenir les autres.

Les plus simples à exprimer sont ceux gouvernant la divergence des longueurs de corrélation au voisinage des seuils

$$\zeta_{\perp} \propto \delta^{-\nu_{\perp}} \quad (3.34)$$

$$\zeta_{\parallel} \propto \delta^{-\nu_{\parallel}} \quad (3.35)$$

Ils sont déduits des relations  $\alpha = \beta/\nu_{\parallel}$  et  $z = \nu_{\parallel}/\nu_{\perp}$ , dont on trouvera la démonstration dans la référence [58].

Pour conclure cet appendice, nous ferons remarquer que dans l'exemple que nous avons donné ( $\epsilon = 2/3$  et  $r_c \simeq 3.7246$ ), les estimations de  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $z$  sont compatibles avec celles de la classe d'universalité de la percolation dirigée sur laquelle nous revenons dans la section suivante.

---

<sup>32</sup> Il faudra garder à l'esprit que leur mesures ne sont pas complètement indépendantes puisque la position du point critique, estimé lors de la mesure de  $\alpha$ , est réutilisé pour  $\beta$  et  $z$ .

### 3.6 Appendice B : Percolation dirigée et classe d'universalité

De nombreux problèmes se ramènent à l'étude de la propagation d'un "agent" dans un milieu hétérogène. Cela inclut la propagation d'un feu de forêt ou d'une épidémie au sein d'une population, ou encore l'étude des propriétés de conduction d'un matériau.

L'"agent" est une notion assez vague qui fait plutôt référence à une propriété locale du milieu qui aura la possibilité de se propager par contact. Pour reprendre l'exemple du feu de forêt, on imagine que la forêt se compose à  $p$  pourcent d'arbres distribués aléatoirement, le reste s'assimilant à des clairières.

La question que l'on se pose maintenant concerne les chances de survie de cette forêt si un feu se déclenche. Sachant qu'il se propage par contact, c'est à dire d'un arbre en feu à ses voisins, on se doute bien que si la concentration d'arbres est très élevée, presque tous vont être atteints par le feu.

Autrement dit, il existe un chemin reliant la majeure partie des arbres entre eux. Au contraire, si cette forêt se compose essentiellement de clairières, le feu va rester localisé autour du foyer initial. Seul un petit ensemble d'arbres, on dira *amas*, sera détruit.

Se poser la question de la survie d'une forêt revient à se demander s'il existe un amas qui relie entre eux la majeure partie des arbres. La théorie de la percolation a pour objet l'étude du nombre et des propriétés de ces amas [98].

On peut montrer que dans un système de taille infinie, il existe une valeur  $p_c$  tel qu'on observe une transition entre un régime où le plus gros amas percole et contient la majeure partie des arbres du système, et un régime où tous les amas sont de taille finie. Le comportement du système au point de transition et dans son voisinage, rentre dans la catégorie des phénomènes critiques dont nous avons parlé dans l'introduction.

La percolation dirigée est une variante anisotrope de la percolation. Dans le cas de la forêt, cela signifie que la propagation du feu ne peut se faire que dans une direction donnée, par exemple à cause du vent. Du point de vue des chemins existant entre les arbres, cela signifie qu'il n'est pas possible de revenir en arrière, une fois que l'on a fait un pas dans cette direction.

Cette différence modifie de manière importante les propriétés des amas (position du seuil de transition et exposants critiques différents). Le caractère irréversible de ce mode de propagation permet de l'assimiler à un processus

dépendant du temps, qui joue le rôle de cette direction privilégiée.

Les mécanismes de la percolation dirigée sont facilement traduisibles en règle d'évolution d'un automate cellulaire probabiliste à deux états. L'un est dit inactif (noté 0) l'autre actif (noté 1). Les règles telles que nous allons les décrire, s'appliquent à un réseau triangulaire de 1+1 dimensions — une d'espace plus le temps représentant la direction privilégiée — (voir Fig. 3.56). Le tableau à double entrée 3.8 résume les règles d'évolutions en fonction de la configuration de deux sites adjacents.

$x \setminus y$	0	1
0	0	0 $1 - p$ 1 $p$
1	0 $1 - p$ 1 $p$	0 $(1 - p)^2$ 1 $2p - p^2$

TAB. 3.8 - Tableau à double entrée résumant les règles d'évolution de la percolation dirigée.  $p$  est la probabilité que l'un des "liens" propageant l'état actif soit ouvert.

Nous utiliserons à plusieurs reprises ce type de tableau pour décrire les règles d'évolution des automates cellulaires probabilistes utilisant le même type de réseau. La colonne de droite et la ligne supérieure contiennent les différents types de sites et permettent de prendre en compte l'ensemble des paires  $(x, y)$  possibles. Les cases intérieures contiennent le ou les résultats possibles à l'itérations suivantes sur le point médian. Dans le cas où il y a plusieurs possibilités, on représente la probabilité (dépendant en général d'un paramètre) de l'obtenir.

Ainsi il faut lire que :

- lorsque deux sites adjacents, en  $i$  et  $i + 1$ , sont dans l'état inactif (0) au temps  $t$ , le site  $i + 1/2$  l'est également au temps  $t + 1$ .
- lorsque l'un est actif et l'autre non (on notera la symétrie  $01 \Leftrightarrow 10$ ), on obtient l'état actif (1) avec la probabilité  $p$  et l'état inactif (0) avec la probabilité  $1 - p$ .  $p$  est alors la probabilité pour que le "lien" reliant le site actif au site  $i + 1/2$  soit ouvert.
- lorsque les deux sites sont actifs, la probabilité pour que les deux "liens" soient fermés simultanément est donnée par  $(1 - p)^2$ , et correspond à la probabilité que le site  $i + 1/2$  soit inactif.



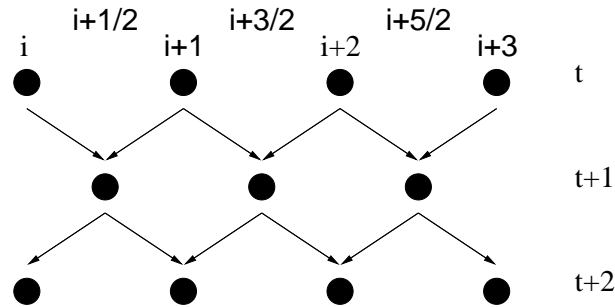


FIG. 3.56 - Représentation des liens entre sites en fonction du temps. L'état des sites  $i + 2$  et  $i + 3$  au temps  $t$ , détermine l'état du site  $i + 5/2$  au temps  $t + 1$ .

La probabilité pour que deux sites inactifs conduisent à l'apparition d'un actif est nulle, conférant à un état où tous les sites sont inactifs la propriété d'être absorbant. En revanche, un état où tous les sites sont actifs n'est pas stable<sup>33</sup>. L'état actif est donc localement instable, mais peut se propager par contamination.

Pour les petites valeurs de  $p$ , toutes les conditions initiales tendent vers l'état absorbant, alors que pour  $p$  suffisamment grand, une condition initiale quelconque converge avec une probabilité finie vers un état "turbulent" statistiquement stationnaire, où la densité de sites actifs est non nulle, et où la structure spatiale à un temps et la dynamique temporelle en un point sont désordonnées.

Ce régime permanent où la densité de sites actifs est non nulle est l'analogie du régime où l'amas composé des sites actifs percole au travers du réseau spatio-temporel. La densité de sites actifs est le paramètre d'ordre naturel pour différencier ces deux attracteurs. En variant le paramètre  $p$ , on passe d'un régime à l'autre via une transition continue, analogue des transitions de phases du second ordre des systèmes à l'équilibre thermodynamique.

On représente sur la Fig. 3.57 un diagramme spatio-temporel typique de l'évolution d'une condition initiale où tous les sites sont actifs, selon les règles de la percolation de liens pour  $p = 0.644$ .

Bien que les grandeurs thermodynamiques telles que l'énergie libre n'aient pas d'analogie, on peut tout de même caractériser les propriétés macroscopiques du milieu en mesurant par exemple les longueurs de corrélations temporelles et spatiales. Ces longueurs divergent lorsque l'on s'approche du point

<sup>33</sup>. La probabilité qu'un site inactif apparaisse est non nulle sauf pour  $p = 1$ .

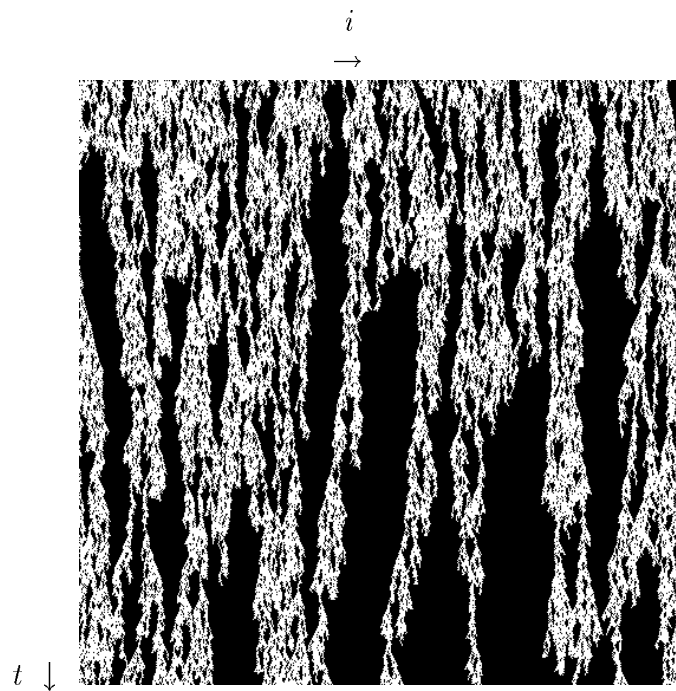


FIG. 3.57 - *Diagramme spatio-temporel représentant une évolution typique selon les règles de la percolation dirigée pour  $p = 0.644$  un réseau de 512 sites et 512 itérations (le temps croît de haut en bas). Les sites blanc sont actifs, les noirs sont inactifs.*

de transition, signe du comportement critique caractérisant la dynamique macroscopique du système en ce point et dans son voisinage. Cela a pour conséquence qu'elle (la dynamique macroscopique) ne dépend plus du détail de la dynamique locale mais seulement des propriétés invariantes d'échelle (dimension d'espace, processus de propagation, ...), et est caractérisée par des lois de puissance dont les exposants sont les grandeurs significatives (voir appendice A, (Sect.3.5)).

P. Grassberger [46] a été le premier à conjecturer que tous les systèmes probabilistes avec un état absorbant unique, des interactions à courtes portées et une transition continue sont gouvernés par les mêmes lois d'échelle au voisinage des points de transition, définissant ainsi une *classe d'universalité*. On notera que contrairement à la percolation ordinaire, les exposants de la percolation dirigée ne sont connus qu'approximativement. Les mesures les plus précises utilisent des méthodes de dénombrement [29].

La classe d'universalité de la percolation dirigée a été depuis plus de 20 ans l'objet de nombreuses investigations qui ont montré sa robustesse (voir la référence [56] et celles qui y sont citées).

Il semble acquis maintenant que la conjecture de Grassberger, s'applique aussi aux systèmes dont l'état absorbant est dégénéré dans certaines conditions. Notamment lorsque la distribution de ces états au sein des domaines inactifs (ou laminaires) est assez homogène pour que les propriétés moyennes de propagations de l'état actif soient bien définies à grande échelle. On dira dans ce cas, qu'il existe un état laminaire effectif, et tout se passe comme si il était unique.

On donne ici les valeurs des exposants critiques  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $z$  de la classe d'universalité de la percolation dirigée

	$\alpha$	$\beta$	$z$
DPC	0.1597(5)	0.277(2)	1.580(1)

TAB. 3.9 - *Exposants associés à la classe d'universalité de la percolation dirigée, issus de [29].*

La seule exception notable correspond à la "parity conserving class" (PCC dans la littérature) que nous décrivons dans l'appendice C (Sect. 3.7).

### 3.7 Appendice C : La “Parity Conserving Class”

Nous présenterons dans cet appendice deux modèles appartenant à la “parity conserving class”. Cette classe d’universalité est la seule apparaissant comme une alternative à la classe d’universalité de la percolation dirigée, pour les systèmes possédant un état absorbant dégénéré. Nous verrons comment les propriétés de propagation de l’état turbulent sont suffisamment modifiées pour justifier l’émergence de comportements critiques distincts de ceux apparaissant au sein de la classe d’universalité de la percolation dirigée.

La “parity conserving class” tire son nom de la loi de conservation associée aux premiers modèles où elle a été observée ([47] et références citées dans [56]).

On rappelle dans le tableau 3.10, les règles de dévolution du modèle A de la référence [47].

$t$	111	101	010	100	001	$\overbrace{011}$	$\overbrace{110}$	000
$t+1$	0	0	1	1	1	$\begin{matrix} 0 & 1 \\ p & 1-p \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 1 \\ p & 1-p \end{matrix}$	0

TAB. 3.10 - Règles d’évolution du modèle A de Grassberger et al. [47]. C’est un modèle à 2 états sur un réseau carré. L’état d’un site au temps  $t+1$  dépend de son état au temps  $t$  ainsi que des états de ses deux voisins (voir Fig. 3.58), soit au total  $2^3 = 8$  cas possibles. Le seul paramètre du modèle, noté  $p$ , est la probabilité pour qu’un site soit dans l’état inactif au temps  $t+1$ , dans le cas où il était actif au temps  $t$  alors que l’un de ses voisins était actif et l’autre inactif.

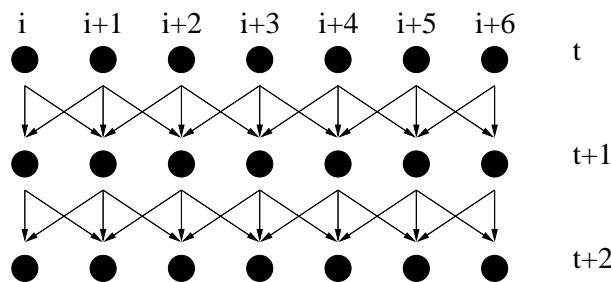


FIG. 3.58 - Représentation des interactions entre sites d’un réseau carré de dimension  $1+1$  (une d’espace plus une associée au temps). Il est à comparer au réseau de la Fig. 3.56.

Ce système possède un état absorbant de période 2 composé d'une alternance de sites dans l'état<sup>34</sup> 0 et 1. La brisure d'invariance par translation induit la dégénérescence de l'état absorbant : il y a l'état absorbant  $I_1$  tel que les sites inactifs soient sur des sites paires, et réciproquement l'état absorbant  $I_2$  tel que les sites actifs soient sur des sites paires. Les paires de sites de même type constituent le véritable état actif de la dynamique locale.

Ces paires de sites identiques sont souvent assimilées à des "marcheurs" se déplaçant diffusivement. Lorsque deux marcheurs se rencontrent, il y a annihilation. Ils ont par ailleurs la possibilité de nucléer d'autres marcheurs sur les sites voisins, mais toujours en nombre paire, de sorte que les annihilations entre les marcheurs nucléés et le marcheur dont ils sont issus, ne peuvent aboutir à la disparition de ce dernier. Ces mécanismes aboutissent indirectement à la conservation du nombre de marcheurs modulo 2. C'est cette loi de conservation qui est à l'origine du nom de la classe d'universalité associée.

Raisonnement sur la conservation d'un nombre de "marcheurs" *modulo 2*, ne nous dit pas grand chose quant à l'origine d'une classe d'universalité distincte de celle de la percolation dirigée.

Nous allons montrer dans les paragraphes suivants, que les propriétés de propagation de l'état actif sont fortement corrélées à la taille des domaines laminaires qui composent le système, et sont susceptibles de modifier les propriétés critiques aux points de transition.

On peut relier l'existence de ces marcheurs à la dégénérescence de l'état absorbant comme cela est montré sur la Fig. 3.59. Plus précisément, le raccordement de deux grands domaines composés des deux états absorbants  $I_1$  et  $I_2$ , ne peut se faire que par la maintien d'au moins un site actif les séparant.

Dès lors, la particularité de ce modèle vient du fait que l'état actif (vu comme un ensemble de marcheurs) ne peut disparaître que par annihilation entre sites actifs.

Le taux d'annihilation des sites actifs est donc fortement dépendant de la distribution des distances les séparant. Celle-ci est directement liée à la taille des domaines dans l'état absorbant.

On représente l'annihilation de deux marcheurs sur la Fig. 3.60. On notera que cette annihilation s'accompagne d'un changement "macroscopique" des

---

34. Lorsque le système est dans l'état  $\dots 010101010\dots$ , les deux seules règles d'évolution à appliquer sont 101 au temps  $t$  donne 0 au temps  $t + 1$  et 010 donne 1. Cet état est donc stationnaire.

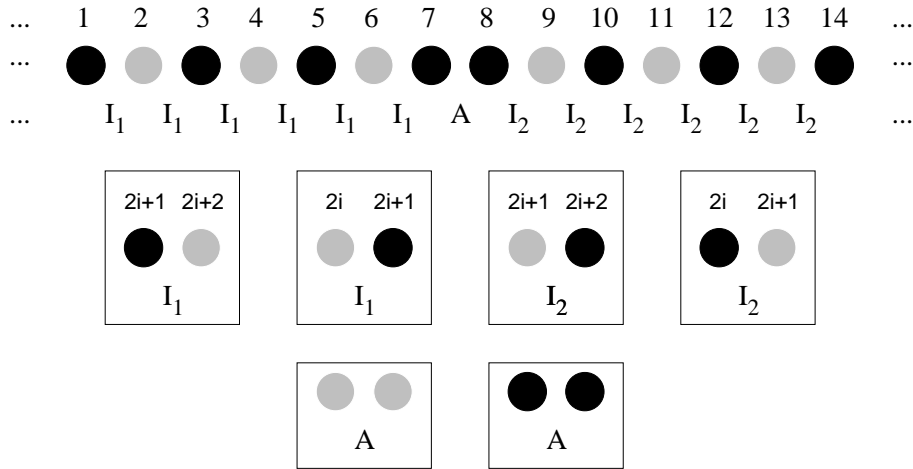


FIG. 3.59 - Configuration typique de maintien de l'état actif à cause de la dégénérescence de l'état absorbant pour le modèle A de la référence [47]. On peut utiliser une notation réduite en fonction des réalisations à deux sites en tenant compte de la parité du numéro du premier site, comme cela est montré dans les rectangles. On note  $I_1$  et  $I_2$  les états absorbants, et A les états actifs constitués de deux sites de même type. Le raccordement de deux grandes zones  $I_1$  et  $I_2$  ne peut se faire que par le maintien d'un site actif.

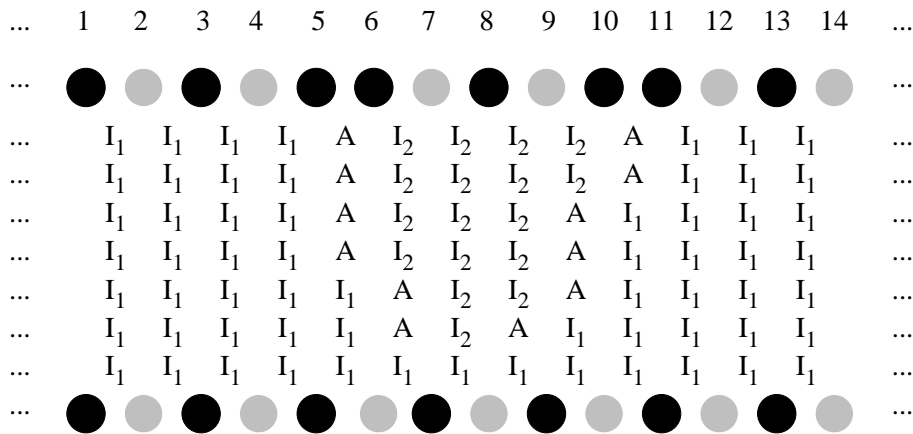


FIG. 3.60 - Evolution schématique du modèle A aboutissant au “retournement” d'une zone laminaire de type  $I_2$ , remplacée par une zone de type  $I_1$ . On observe la mort de sites actifs par annihilation.

	$\alpha$	$\beta$
DPC	0.1597(5)	0.277(2)
PCC	0.29(1)	0.9(1)

TAB. 3.11 - *Exposants associés à la classe d'universalité de la percolation dirigée et de la "parity conserving class", issus respectivement de [29] et [56].*

propriétés du système puisqu'il y a "retournement" d'un domaine complet (voir légende de la figure). Dans ce cas, le processus de propagation de l'état actif n'est plus vraiment local, puisque le taux d'annihilation dépend des propriétés macroscopiques du milieu.

La compétition entre les processus de nucléation et d'annihilation induit une transition continue entre un régime sous le seuil où la dynamique est du type propagation-annihilation (voir paragraphes suivant) et une phase active (ou turbulente). Les propriétés critiques que l'on observe au seuil de la transition et dans son voisinage, sont gouvernées par des exposants différents de ceux de la classe d'universalité de la percolation dirigée.

Le fait que les mêmes exposants critiques aient été trouvés dans plusieurs modèles suggèrent l'existence d'une nouvelle classe d'universalité. On reporte dans le tableau 3.11, les estimations des exposants critiques  $\alpha$  et  $\beta$  associés à cette classe.

Comme nous l'avons déjà dit, la loi de conservation qui caractérise cette classe n'est qu'une conséquence indirecte du mécanisme d'annihilation. H. Hinrichsen a récemment proposé deux modèles ne conservant pas le nombre de sites actifs modulo 2, mais appartenant quand même à la "parity conserving class".

Nous allons décrire le premier de ces modèles<sup>35</sup>. Il est défini sur un réseau identique à celui du modèle illustrant la percolation dirigée (voir Fig. 3.56).

Chaque site peut être dans un des trois états suivant  $A$  comme actif,  $I_1$  et  $I_2$  pour inactif<sup>36</sup> 1 ou 2. Les états  $I_1$  et  $I_2$  sont équivalents à la différence près que les configurations  $I_1I_2$  et  $I_2I_1$  induisent systématiquement l'apparition d'un actif, rappelant fortement le phénomène observé dans le modèle  $A$ . Nous présentons le détail des règles du modèle dans le tableau 3.12.

On représente sur la Fig. 3.61 trois diagrammes spatio-temporels caractéristiques au dessus du seuil, proche du seuil et sous le seuil.

35. Nous y ferons référence par la suite sous le nom de modèle I, en reprenant ainsi la dénomination et les notations choisies par H. Hinrichsen dans la référence [56].

36. On notera que l'auteur introduit explicitement la dégénérescence de l'état absorbant.

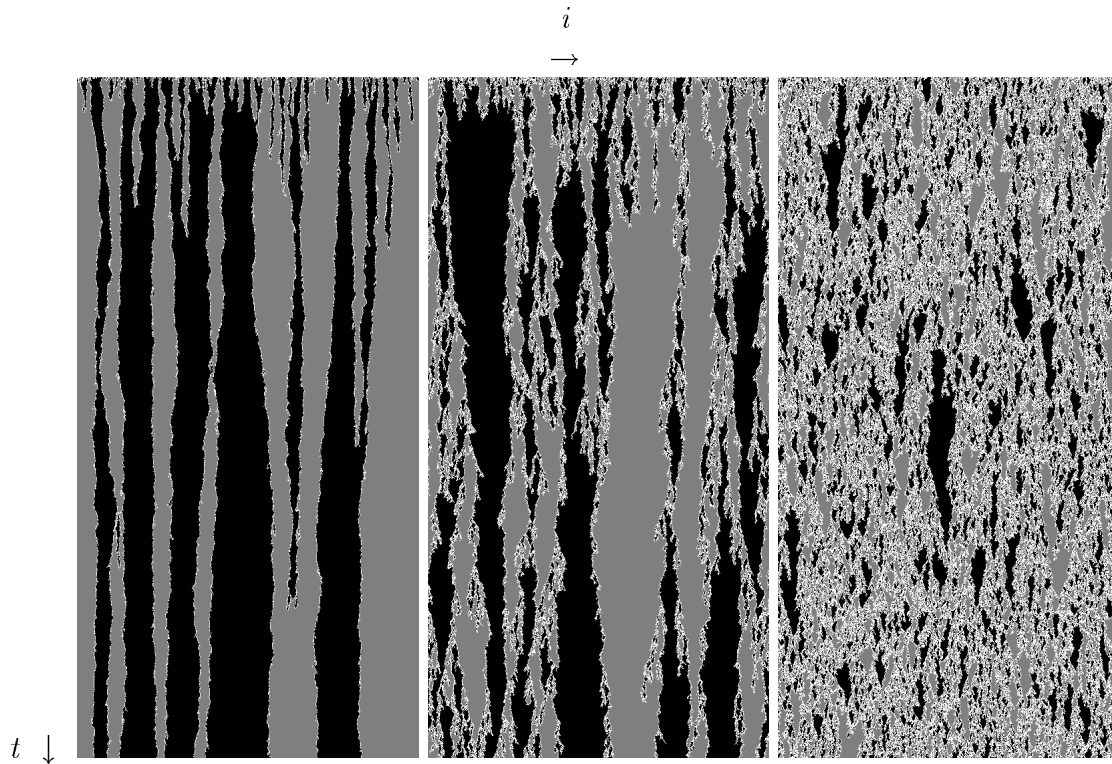


FIG. 3.61 - Diagrammes spatio-temporels représentant les trois régimes caractéristiques du modèle I. Sous le seuil (image de droite,  $p = q = 0.4$ ), les sites actifs (en blanc) sont aux interfaces entre les domaines absorbants de type  $I_1$  (en gris) et  $I_2$  (en noir). On observe la croissance de la taille de ces domaines par annihilations successives. Au dessus du seuil (image de gauche,  $p = q = 0.62$ ), on observe la coexistence de domaines composés de sites absorbants et actifs, dont les caractéristiques évoluent de façon désordonnées. C'est le régime d'intermittence spatio-temporelle. Le passage de l'un à l'autre se produit au point de transition (image centrale,  $p = q = 0.62 \simeq p_c$ ).



$x \setminus y$	$A$	$I_1$	$I_2$
$A$	$A$ $q$ $I_1$ $(1-q)/2$ $I_2$ $(1-q)/2$	$A$ $p$ $I_1$ $(1-p)$	$A$ $p$ $I_2$ $(1-p)$
$I_1$	$\Leftrightarrow$ $AI_1$	$I_1$	$A$
$I_2$	$\Leftrightarrow$ $AI_2$	$A$	$I_2$

TAB. 3.12 - Tableau à double entrée résumant les règles d'évolution du modèle  $I$  de H. Hinrichsen [56].  $p$  et  $q$  sont les paramètres libres.

Nous avons déjà souligné que ce modèle ne conserve pas explicitement le nombre de “marcheurs” modulo 2 contrairement au modèle A.

H. Hinrichsen a souligné que tous les points de transition de ce modèle sont dans le domaine de l'espace des paramètres où un système gouverné par des règles de percolation dirigée “pure” serait dans l'état absorbant<sup>37</sup>.

Cela signifie que les sites actifs constituant un amas au sein d'un domaine absorbant de type  $I_1$  ou  $I_2$  meurent en un temps fini. Par contre, les “marcheurs” séparant des domaines absorbants de type différents restent actifs jusqu'à ce qu'ils rencontrent d'autres marcheurs, comme nous l'avons expliqué pour le modèle A.

C'est bien le lien entre le temps de vie des “marcheurs” et la taille des domaines absorbants qui crée des corrélations à grande échelle au sein du système, et est à l'origine de l'apparition d'une classe distincte de celle de la percolation dirigée.

Finalement, nous soulignerons une autre des spécificités des modèles appartenant à la “parity conserving class”. La dynamique du système sous le seuil, n'est pas caractérisée par la convergence exponentielle du paramètre d'ordre vers zéro. Le régime que l'on observe est assimilable à un régime de croissance de domaines (voir Fig. 3.61). Dans celui-ci le nombre de “marcheurs”, ou d'interfaces entre des domaines  $I_1$  et  $I_2$ , varie en  $1/\sqrt{t}$ . Cependant, la transition reste bien définie dans la limite des tailles et des temps infinis, puisque la densité de site turbulent est nulle à temps infini sous le seuil.

---

37. On peut effectivement remarquer qu'en supprimant les règles qui maintiennent un site actif entre deux domaines absorbants  $I_1$  et  $I_2$ , le modèle se réduit exactement à un processus de type percolation dirigée, où la distinction entre sites de types  $I_1$  et  $I_2$  n'est plus fondée.

## Bibliographie

- [1] M. A. Albrecht et W. H. Kegel, “The formation of interstellar molecular lines in a turbulent velocity field with finite correlation length”, *Astronomy & Astrophysics*, **176**, (1987), 317.
- [2] Anders E. et N. Grevesse, “Abundances of the elements - Meteoritic and solar”, *Geochimica et Cosmochimica Acta*, **53**, (1989), 197.
- [3] V. Aharonson, O. Regev et N. Shaviv, “Pattern formation in thermally bistable media”, *The Astrophysical Journal*, **426**, (1994), 621.
- [4] J. J. Binney, N. J. Dowrick, A. J. Fisher et M. E. J. Newman, “The theory of critical phenomena: an introduction to the renormalisation group”, Oxford science Publications, (1993).
- [5] S. Bottin, “Structures cohérentes et transition vers la turbulence par intermittence spatio-temporelle dans l’écoulement de Couette plan”, Thèse de doctorat de l’université Paris XI Orsay, (1998).
- [6] S. Bottin, F. Daviaud, P. Manneville et O. Dauchot, “Discontinuous transition to spatiotemporal intermittency in plane Couette flow”, *Europhysics Letters*, **43**, (1998), 171.
- [7] S. Bottin et H. Chaté, “Statistical analysis of transition to turbulence in plane couette flow”, *European Physical Journal B*, **6**, (1998) 143.
- [8] B. H. Bransden et C. J. Joachain, “Physics of atoms and molecules”, Longman, (1983).
- [9] A. J. Bray, “Theory of phase-ordering kinetics”, *Advances in Physics*, **43**, 3, (1994), 357.
- [10] P. Bergé, Y. Pomeau et C. Vidal, “L’ordre dans le chaos”, Hermann, Collection enseignement des sciences, (1988).

- 
- [11] P. Bergé, Y. Pomeau et C. Vidal, “L’espace chaotique”, Hermann, Collection enseignement des sciences, (1998).
- [12] O. Cadot, S. Douady et Y. Couder, “Characterization of the low pressure filaments in a three-dimensional turbulent shear flow”, *Physics of Fluids*, **7**, (1995), 630.
- [13] J. L. Casti, “Alternate Realities: Mathematical Models of Nature and Man”, Wiley, (1989).
- [14] H. Chaté et F. Daviaud, “Spatiotemporal intermittency”, dans “New approaches to the description and the modeling of turbulence”, Lecture Series, Von Karman Institute, (1991).
- [15] H. Chaté et P. Manneville, “Transition to turbulence *via* spatiotemporal intermittency”, *Physical Review Letters*, **58**, (1987), 112.
- [16] H. Chaté et P. Manneville, “Phase turbulence, spatio-temporal intermittency and coherent structures”, *New Trends in Nonlinear dynamics and Pattern Forming Phenomena: the Geometry of Nonequilibrium*, Editeurs P. Huerre et P. Coulet, Edition Plenum Press, New-York (1990).
- [17] H. Chaté et P. Manneville, “Spatio-temporal intermittency in coupled map lattices”, *Physica D*, **32**, (1988), 409.
- [18] H. Chaté et P. Manneville, “Role of defects in the transition to turbulence *via* spatiotemporal intermittency”, *Physica D*, **37**, (1988), 33.
- [19] “Mixing: Chaos and Turbulence”, éditeurs H. Chaté, E. Villermaux et J.M. Chomaz, Plenum Press, (1999).
- [20] Cohen-Tannoudji C., Diu B. et Laloë F., “Mécanique Quantique”, tomes 1 et 2, Hermann, Collection Enseignement des Sciences, (1973).
- [21] F. Combes, P. Boissé, A. Mazure et A. Blanchard, “Galaxie et cosmologie”, InterEditions/Editions du CNRS, collection Savoirs Actuels, (1991).
- [22] Y. Couder, S. Michalland, M. Rabaud et H. Thomé, “The printer’s instability: the dynamical regimes of directional viscous fingering”, dans “Nonlinear evolution of spatio-temporal structures in dissipative continuous systems”, édité par F. H. Busse et L. Kramer, Plenum Press, New, York, (1990), 487.

- 
- [23] M. C. Cross and P. C. Hohenberg: “Pattern formation outside of equilibrium”, *Review of Modern Physics*, **65**, (1993), 851.
- [24] F. Daviaud, M. Dubois, P. Bergé, “Spatio-temporal intermittency in quasi 1-d Rayleigh-Bénard convection”, *Europhysics Letters*, **9**, (1989), 441.
- [25] F. Daviaud, M. Bonetti et M. Dubois, “Transition to turbulence in 1D Rayleigh-Bénard convection”, *Physical Review A*, **42**, (1990), 3388.
- [26] F. Daviaud, J. Lega, P. Bergé, P. Couillet et M. Dubois, “Spatio-temporal intermittency in a 1-d convective pattern: theoretical model and experiments”, *Physica D*, **55**, (1992), 287.
- [27] H.J. de Vega, N. Sánchez et F. Combes, “Self-gravity as an explanation of the fractal structure of the interstellar medium”, *Nature*, **383**, (1996), 56.
- [28] P. G. Drazin and R. S. Johnson, “Solitons: an introduction”, Cambridge University Press (1989).
- [29] J. W. Essam, A. J. Guttmann et K De’Bell, “On two-dimensional directed percolation”, *Journal of Physics A*, **21**, (1998), 3815.
- [30] E. Falgarone et T. G. Phillips, “A signature of the intermittency of interstellar turbulence - The wings of molecular line profiles”, *The Astrophysical Journal*, **359**, (1990), 344.
- [31] E. Falgarone, T. G. Phillips et C. K. Walker, “The edge of molecular clouds - Fractal boundaries and density structure”, *The Astrophysical Journal*, **378**, (1991), 186.
- [32] E. Falgarone, D. C. Lis, T. G. Phillips, A. Pouquet, D. G. Porter et P. R. Woodward, “Synthesized spectra of turbulent clouds”, *The Astrophysical Journal*, **436**, (1994), 728.
- [33] E. Falgarone, “Small-scale structure of interstellar clouds : the impact of turbulence”, *ASP Conference Series*, **80**, (1995), 158.
- [34] E. Falgarone, G. Pineau des Forêts et E. Roueff, “Chemical signatures of the intermittency of turbulence in low density interstellar clouds”, *Astronomy and Astrophysics*, **300**, (1995), 870.

- [35] E. Falgarone et J.-L. Puget, “The intermittency of turbulence in interstellar clouds: implications for the gas kinetic temperature and decoupling of heavy particles from the gas motions”, *Astronomy and Astrophysics*, **293**, (1995), 840.
- [36] R. Fitzhugh, “Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane”, *Biophysics Journal*, **1**, (1961), 445.
- [37] D. R. Flower, “Interstellar chemistry”, *International Reviews in Physical Chemistry*, **14-2**, (1995), 421.
- [38] D.R. Flower et G. Pineau des Forêts, “C-type shocks in the interstellar medium: profiles of  $CH^+$  and  $CH$  absorption lines”, *MNRAS*, **297**, (1998), 1182.
- [39] U. Frisch, “Turbulence”, Cambridge University Press, (1995).
- [40] P. Frojdh, M. Howard et K. B. Lauritsen, “Directed Percolation with a Wall or Edge”, *Journal of Physics A*, **31**, (1998), 2311.
- [41] G. W. Gear, “Numerical initial value problems in ordinary differential equations”, Prentice-Hall, (1971).
- [42] M. Gérin, E. Falgarone, K. Joulain, M. Kopp, J. Le Bourlot, G. Pineau des Forêts, E. Roueff et P. Schilke, “Chemical inhomogeneities in interstellar clouds: the high latitude cloud MCLD 123.5+24.9”, *Astronomy and Astrophysics*, **318**, (1997), 579.
- [43] P. F. Goldsmith et W. D. Langer, “Molecular cooling and thermal balance of dense interstellar clouds”, *Astrophysical Journal*, **222**, (1978), 881.
- [44] R. E. Goldstein, D. J. Muraki et D. M. Petrich: “Interface proliferation and growth of labyrinths in a reaction-diffusion system”, *Physical Review E* **53**, (1996), 3933.
- [45] R. Grappin, J. Léorat, E. Cavilier et G. Prigent, “Thermal birth below the sonic point of turbulent streams in the solar wind”, *Astronomy and Astrophysics*, **317**, (1997), L31.
- [46] P. Grassberger, “One phase transition in Schlögl’s second model”, *Zeitschrift für Physik B*, **47**, (1982), 365.

- [47] P. Grassberger, F. Krause et T. von der Twer, “A new type of kinetic critical phenomenon”, *Journal of Physics*, **17**, (1984), L105.
- [48] P. Grassberger, “Are damage spreading transitions generically in the universality class of directed percolation?”, *Journal of Statistical Physics*, **79**, (1995), 13.
- [49] P. Grassberger, H. Chaté et G. Rousseau, “Spreading in media with long time memory”, *Physical Review E*, **55**, (1997), 2488.
- [50] P. Grassberger et T. Schreiber, “Phase transitions in coupled map lattices”, *Physica D*, **50**, (1991), 177.
- [51] R. Gredel, “Interstellar  $CH^+$  in southern  $OB$  associations”, *Astronomy and Astrophysics*, **320**, (1997), 929.
- [52] A. Hagberg et E. Meron: “Pattern formation in non-gradient reaction-diffusion systems: the effects of front bifurcation”, *Nonlinearity*, **7**, (1994), 805.
- [53] A. Hagberg et E. Meron, “Complex patterns in reaction-diffusion systems: a tale of two front instabilities”, *Chaos*, **4**, (1994), 477.
- [54] P. Havas, “The range of application of the Lagrange Formalism”, *Nuovo Cimento supplement*, **5**, (1957), 363.
- [55] A. Bunde et S. Havlin, “Fractals and disordered systems”, Springer Verlag, (1991).
- [56] H. Hinrichsen, “Stochastic lattice models with several absorbing states”, *Physical Review E*, **55**, (1997), 219.
- [57] J. M. Houlik et M. H. Jensen, “Critical correlations in coupled map lattices”, *Physics Letters A*, **163**, (1992), 275.
- [58] J. M. Houlik, I. Webman et M. H. Jensen, “Mean-field theory and critical behavior of coupled map lattices”, *Physical Review A*, **41**, (1990), 4210.
- [59] H. Ikeda, M. Mimura et Y. Nishiura, *Nonlinear Anal. TMA*, **13**, (1989), 507.
- [60] *Images des Mathématiques*, “Modélisations de la combustion”, (1996).

- [61] I. Jensen, "Universality class of a one-dimensional cellular automaton", *Physical Review A*, **43**, (1991), 3187.
- [62] K. Joulain, E. Falgarone, G. Pineau des forêts et D. Flower, "Non-equilibrium chemistry in the dissipative structures of interstellar turbulence", *Astronomy and Astrophysics*, **340**, (1998), 241.
- [63] K. Kaneko, "Spatiotemporal intermittency in coupled map lattices", *Progress in Theoretical Physics*, **74**, (1985), 1033.
- [64] W. H. Kegel, G. Piehler et M. A. Albrecht, "The formation of interstellar molecular lines in a turbulent velocity field with finite correlation length II the case  $\sigma \gg v_{therm}$ ", *Astronomy and Astrophysics*, **270**, (1993), 407.
- [65] D. Kondepudi et I. Prigogine, "Modern thermodynamics: from heat engines to dissipative structures", Wiley, (1998).
- [66] M. Kopp, "Physico-chimie des nuages moléculaires translucides", Thèse de Doctorat de l'université PARIS XI, Orsay, (1996).
- [67] M. Kopp et E. Roueff, "The role of the geometry and dust environment in stationary models of translucent interstellar clouds", soumis à MNRAS (1998).
- [68] K. R. Lang, "Astrophysical formulae", Springer Verlag, 2<sup>nd</sup> édition, (1980).
- [69] J. S. Langer, "Solids far from equilibrium", éditeur C. Godrèche, Cambridge University Press, (1992).
- [70] K. B. Lauritsen, K. Sneppen, M. Markosova et M. H. Jensen, "Directed percolation with an absorbing boundary", *Physica A*, **247**, (1997), 1.
- [71] J. Le Bourlot, G. Pineau des Forêts, E. Roueff et P. Schilke. "Bistability in dark cloud chemistry", *The Astrophysical Journal*, **416**, (1993), 87L.
- [72] J. Le Bourlot, G. Pineau des Forêts et E. roueff, "Complex dynamical behaviour in interstellar chemistry", *Astronomy and Astrophysics*, **297**, (1995), 251.
- [73] J. Le Bourlot, G. Pineau des Forêts, E. Roueff et D.B Flower, "Infrared and submillimetric emission lines from the envelopes of dark clouds", *Astronomy and Astrophysics*, **267**, (1993), 233.

- 
- [74] H. H. Lee, E. Roueff, G. Pineau des Forêts, O. M. Shalabiea, R. Terzieva et E. Herbst, “Bistability in large chemical networks: a global view”, *Astronomy and Astrophysics*, **334**, (1998), 1047.
- [75] A. Malevanets et R. Kapral, “Reactive lattice gas model for Fitzhugh-Nagumo dynamics”, *Physical Review Letter*, **77**, (1996), 767.
- [76] A. Malevanets et R. Kapral, “Microscopic model for Fitzhugh-Nagumo dynamics”, *Physical Review E*, **55**, (1997), 5670.
- [77] P. Manneville, “Structures dissipatives, chaos et turbulence”, Aléa-Saclay (1991).
- [78] P. Manneville, “Intermittence spatio-temporelle: Aspects théoriques”, à paraître, (1999).
- [79] P. Marcq et A. Naert, “A Langevin equation for the energy cascade in the fully-developed turbulence”, *Physica D*, à paraître, (1998).
- [80] E. Meron, “Pattern formation in excitable media”, *Physics Reports* **218** (1992), 1.
- [81] M. S. Miesch et J. Bally, “Statistical analysis of turbulence in molecular clouds”, *Astrophysical Journal*, **429**, (1994), 645.
- [82] O. Moriyama et M. Matsushita, “Scaling relation in a class of spatio-temporal intermittency”, *Journal of the Physical Society of Japan*, **65**, (1996), 3478.
- [83] J. S. Nagumo, S. Arimoto et S. Yoshizawa, “An Active Pulse Transmission Line Simulating Nerve Axon”, *Proceedings of Institute of Radio Engineers*, **50**, (1962), 2061.
- [84] Y. Pomeau, “Front motion, metastability and subcritical bifurcations in hydrodynamics”, *Physica*, **23D**, (1986), 3.
- [85] J. Perdang et A. Lejeune, “Cellular automaton experiments on local galactic structure. I. Model assumptions ”, *Astronomy & Astrophysics Supplement Series* **119**, (1996), 231.
- [86] J. Perdang et A. Lejeune, “Cellular automaton experiments on local galactic structure. II. Numerical simulations”, *Astronomy & Astrophysics Supplement Series* **119**, (1996), 249.



- [87] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky et W. T. Vetterling, “Numerical recipes in FORTRAN”, Cambridge University Press, 2<sup>nd</sup> édition, (1992).
- [88] L. E. Reichl, “A modern course in statistical physics”, Edward Arnold Ltd, (1980).
- [89] J. Rolf, T. Bohr et M. H. Jensen, “Directed percolation universality in asynchronous evolution of spatio-temporal intermittency”, Physical Review E, **57**, R2503.
- [90] E. Roueff, J. Le Bourlot et G. Pineau des Forêts, “Impact of dissociative recombination reactions on dark interstellar clouds”, dans “Dissociative recombination: theory, experiment and applications III”, World scientific, (1996).
- [91] G. Rousseau, H. Chaté, J. Le Bourlot, “Lattice dynamical system modelling of molecular clouds”, MNRAS **294**, (1998), 373.
- [92] G. Rousseau et J. Le Bourlot, “The meudonator: a bistability for the interstellar chemistry”, preprint.
- [93] J. M. Scalo, “Theoretical approaches to interstellar turbulence”, dans “Interstellar Processes”, Editeur D. J. Hollenbach et H. A. Thronson, (1987), 349.
- [94] E. Schatzman et F. Praderie, “Les étoiles”, InterEditions/Editions du CNRS, Collection Savoirs Actuels, 1990.
- [95] N. J. Shaviv et O. Regev, “Interface dynamics and domain growth in thermally bistable fluids”, Physical Review E, **50**, (1994), 2048.
- [96] H. H. Shu, “The physics of astrophysics”, University Science Books, 1992. Vol. 1 : “Radiation”. Vol. 2 : “Gas dynamics”.
- [97] M. Spaans, J.H. black et E.F. van Dishoek, “Interstellar turbulence and the origin of  $CH^+$ ”, à paraître.
- [98] D. Stauffer et A. Aharony, “Introduction to percolation theory” (seconde édition), Taylor & Francis, (1992).
- [99] “Molecules in astrophysics: probes and processes”, éditeur E. F. Van Dishoek, IAU symposium **178**, (1996).

- 
- [100] C. Vidal et H. Lemarchand, “La réaction créatrice”, Hermann (1988).
- [101] M. Weissbluth, “Atoms and Molecules”, Acad. Press, New York, (1978).
- [102] G. Wynn-Williams, “The fullness of space: nebulae, stardust, and the interstellar medium”, Cambridge University Press, (1992).
- [103] J. Zinn-Justin, “Quantum Field Theory and Critical Phenomena”, Clarendon Press, collection “The International Series of Monographs on Physics” **77**, (1989).